Examen de álgebra y matemática financiera

Ejercicio 1 (1 punto) - Radicales

a) (0,5p) Simplifica y calcula: $\sqrt{75} + 2\sqrt{12} - \sqrt{27}$

b) (0,5p) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{6}{3 - \sqrt{3}}$

Ejercicio 2 (1 punto) - Potencias

Simplifica, expresando el resultado como una fracción o potencia:

a) (0,5p) $\dfrac{(2^3)^2 \cdot 4^{-1} \cdot 8}{16^2}$

b) (0,5p) $\dfrac{9^2 \cdot 27^{-1}}{3^{-2} \cdot 81}$

Ejercicio 3 (1 punto) - Logaritmos

a) (0,5p) Calcula: $\log_2 32 + \log_3 \dfrac{1}{9} - \log 0{,}001$

b) (0,5p) Resuelve: $2\log x = \log(x + 6)$

Ejercicio 4 (1 punto) - Fracciones

a) (0,5p) Calcula: $\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6}\right) : \dfrac{7}{9} + \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{3}$

b) (0,5p) Simplifica: $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}$

Ejercicio 5 (1 punto) - Interés simple

a) (0,5p) Se depositan 8000 € al $3\,\%$ anual de interés simple durante 4 años. Calcula los intereses obtenidos y el capital final.

b) (0,5p) ¿Durante cuántos años hay que mantener 5000 € al $4\,\%$ anual de interés simple para obtener 1200 € de intereses?

Ejercicio 6 (1 punto) - Interés compuesto

a) (0,5p) Se invierten 6000 € al $2{,}5\,\%$ anual de interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.

b) (0,5p) ¿Cuántos años completos hacen falta para que 4000 € al $5\,\%$ anual de interés compuesto lleguen a 5000 €?

Ejercicio 7 (2 puntos) - Ecuación polinómica

Resuelve la ecuación: $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

Ejercicio 8 (2 puntos) - Sistema de ecuaciones lineales

Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Se descompone cada radicando para sacar factores de la raíz:

$$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}, \quad \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

b) Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{6}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{6(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6(3+\sqrt{3})}{6} = 3+\sqrt{3}$$

Solución Ejercicio 2

a) Se escribe todo como potencia de 2:

$$\frac{2^6 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3}{2^8} = \frac{2^7}{2^8} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

b) Se escribe todo como potencia de 3:

$$\frac{3^4 \cdot 3^{-3}}{3^{-2} \cdot 3^4} = \frac{3^1}{3^2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Solución Ejercicio 3

a) Cada logaritmo por separado:

$$\log_2 32 = 5, \quad \log_3 \frac{1}{9} = -2, \quad \log 0{,}001 = -3$$

$$5 + (-2) - (-3) = 6$$

b) Se aplica la propiedad de la potencia y se igualan los argumentos:

$$\log x^2 = \log(x+6) \Rightarrow x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ o } x = -2$$

Comprobación: $x = -2$ no es válida porque $\log(-2)$ no existe. La solución es $x = 3$.

Solución Ejercicio 4

a) Primero el paréntesis, después la división y por último la suma:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{7}{12} : \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 7} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$$

b) Se reducen a común denominador, que es $(x-1)(x+1)=x^2-1$:

$$\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$$

Solución Ejercicio 5

a) Interés simple: $I=C\cdot r\cdot t$

$$I=8000\cdot 0{,}03\cdot 4=960\text{ euros}$$

$$C_f=8000+960=8960\text{ euros}$$

b) Se despeja el tiempo:

$$t=\frac{I}{C\cdot r}=\frac{1200}{5000\cdot 0{,}04}=6\text{ años}$$

Solución Ejercicio 6

a) Interés compuesto: $C_f=C\cdot(1+r)^t$

$$C_f=6000\cdot 1{,}025^5\approx 6788{,}45\text{ euros}$$

b) Se plantea la ecuación y se resuelve con logaritmos:

$$4000\cdot 1{,}05^t=5000\Rightarrow 1{,}05^t=1{,}25$$

$$t=\frac{\log 1{,}25}{\log 1{,}05}\approx 4{,}57$$

Hacen falta 5 años completos: tras 4 años hay $4862{,}03$ € y tras 5 años $5105{,}13$ €.

Solución Ejercicio 7

Se buscan raíces enteras entre los divisores de 12 y se factoriza el polinomio paso a paso.

1. $x=-1$ es raíz, porque $1+2-7-8+12=0$. Al dividir queda $x^3-3x^2-4x+12$.
2. $x=2$ es raíz, porque $8-12-8+12=0$. Al dividir queda x^2-x-6.
3. Se resuelve la ecuación de segundo grado restante:

$$x^2-x-6=0\Rightarrow x=\frac{1\pm 5}{2}\Rightarrow x=3\text{ o }x=-2$$

La ecuación factorizada es $(x+1)(x-2)(x-3)(x+2)=0$ y las soluciones son $x=-2$, $x=-1$, $x=2$ y $x=3$.

Solución Ejercicio 8

Se llama E_1, E_2 y E_3 a las ecuaciones y se elimina z.

1. $E_1 + E_3$: $2x + 3y = 8$
2. $E_2 + E_3$: $3x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3x$
3. Se sustituye en la primera: $2x + 3(5 - 3x) = 8 \Rightarrow -7x = -7 \Rightarrow x = 1$
4. Entonces $y = 5 - 3 = 2$ y, de E_1, $z = 6 - 1 - 2 = 3$.

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.