Examen de números complejos y derivadas

Ejercicio 1 (1,5 puntos) - Raíces de números complejos

Dado el número complejo $z = -8 + 8\sqrt{3}\,i$:

a) (1p) Calcula todas las raíces cuartas de z y exprésalas en forma binómica.

b) (0,5p) Representa las raíces en el plano complejo. ¿Qué figura forman?

Ejercicio 2 (3 puntos) - Estudio completo de una función

Estudia la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$:

a) (0,5p) Dominio y puntos de corte con los ejes.

b) (1p) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

c) (1p) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos.

d) (0,5p) Representación gráfica aproximada.

Ejercicio 3 (2,5 puntos) - Cálculo de derivadas

Calcula la derivada de cada función (0,5 puntos cada una):

a) $f(x) = (3x^2 - 2x)^5$

b) $f(x) = x^3 \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2 + 1)$

e) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Ejercicio 4 (3 puntos) - Problema de optimización

Con una lámina cuadrada de cartón de 30 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de lado x en cada esquina y se doblan los lados hacia arriba.

a) (0,75p) Expresa el volumen de la caja en función de x e indica entre qué valores puede variar x.

b) (1,5p) Calcula el valor de x que hace máximo el volumen.

c) (0,75p) Justifica que es un máximo y calcula las dimensiones de la caja y su volumen.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Pasamos z a forma polar. El módulo es:

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = 16$$

Como z está en el segundo cuadrante:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{8\sqrt{3}}{-8} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

Las raíces cuartas tienen módulo $\sqrt[4]{16} = 2$ y argumentos $\dfrac{120^\circ + 360^\circ k}{4}$ con $k = 0, 1, 2, 3$:

$$z_0 = 2_{30^\circ} \quad z_1 = 2_{120^\circ} \quad z_2 = 2_{210^\circ} \quad z_3 = 2_{300^\circ}$$

Pasamos a forma binómica con $2(\cos\alpha + i\,\operatorname{sen}\alpha)$:

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i \qquad z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i \qquad z_3 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$$

b) Las cuatro raíces están sobre la circunferencia de centro el origen y radio 2, separadas 90° entre sí. Sus afijos son los vértices de un cuadrado.

Solución Ejercicio 2

a) El denominador se anula en $x = 1$, luego $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Con el eje OY: $f(0) = 0$, punto $(0, 0)$.

Con el eje OX: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, el mismo punto $(0, 0)$.

b) Asíntota vertical en $x = 1$, porque el denominador se anula y el numerador no:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal, pues el grado del numerador es mayor que el del denominador:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x - 1} = \pm\infty$$

Asíntota oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$. Como $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x-1}$, la curva está por encima de la asíntota para $x > 1$ y por debajo para $x < 1$.

c) Derivamos:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Se anula en $x = 0$ y $x = 2$. Estudiamos el signo de f' (el denominador siempre es positivo) en los intervalos que determinan estos puntos y $x = 1$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

Máximo relativo en $(0, 0)$, porque pasa de crecer a decrecer. Mínimo relativo en $(2, 4)$, porque pasa de decrecer a crecer, ya que $f(2) = \dfrac{4}{1} = 4$.

d) La gráfica se dibuja con los datos anteriores:

1. Asíntota vertical $x = 1$ y asíntota oblicua $y = x + 1$.
2. Pasa por el máximo $(0, 0)$ y por el mínimo $(2, 4)$.
3. A la izquierda de $x = 1$ la rama baja hacia $-\infty$ junto a la asíntota vertical y se acerca a $y = x + 1$ por debajo cuando $x \to -\infty$.
4. A la derecha de $x = 1$ la rama baja desde $+\infty$ hasta el mínimo $(2, 4)$ y después sube acercándose a $y = x + 1$ por encima.

Solución Ejercicio 3

a) Regla de la cadena:

$$f'(x) = 5(3x^2 - 2x)^4 \cdot (6x - 2)$$

b) Derivada de un producto:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$$

c) Derivada de un cociente:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2+1) - e^{2x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{2x}(2x^2 - 2x + 2)}{(x^2+1)^2}$$

d) Regla de la cadena:

$$f'(x) = \cos(3x^2 + 1) \cdot 6x = 6x\cos(3x^2 + 1)$$

e) Antes de derivar simplificamos con las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(x-1) - \ln(x+1)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

Solución Ejercicio 4

a) Al recortar cuadrados de lado x, la base es un cuadrado de lado $30-2x$ y la altura de la caja es x:

$$V(x) = x(30-2x)^2$$

Debe ser $x > 0$ y $30 - 2x > 0$, es decir, $x \in (0, 15)$.

b) Derivamos:

$$V'(x) = (30-2x)^2 + x\cdot 2(30-2x)(-2) = (30-2x)(30-2x-4x) = (30-2x)(30-6x)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 15 \text{ o } x = 5$$

El valor $x = 15$ está fuera del dominio $(0, 15)$, luego el único candidato es $x = 5$.

c) Estudiamos el signo de V' en el dominio: $V'(1) = 28 \cdot 24 > 0$ y $V'(10) = 10 \cdot (-30) < 0$. Pasa de creciente a decreciente en $x = 5$, luego es un máximo.

Con $x = 5$ cm, la base es un cuadrado de lado $30 - 10 = 20$ cm y la altura es 5 cm. El volumen máximo es:

$$V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000 \text{ cm}^3$$