Examen de ecuaciones, inecuaciones y binomio de Newton

Ejercicio 1 (0,75 puntos) - Fracciones algebraicas

Opera y simplifica: $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{x}-\frac{x-1}{x}\left(2-\frac{3}{x-1}\right)$

Ejercicio 2 (0,75 puntos) - Ecuación de segundo grado

Resuelve: $\frac{x^2-1}{2}-\frac{x(x-3)}{3}=\frac{2}{3}$

Ejercicio 3 (0,5 puntos) - Ecuación bicuadrada

Resuelve: $4x^4-37x^2+9=0$

Ejercicio 4 (0,75 puntos) - Ecuación racional

Resuelve y comprueba las soluciones: $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{3}$

Ejercicio 5 (0,75 puntos) - Ecuación irracional

Resuelve y comprueba las soluciones: $\sqrt{x+5}=x-1$

Ejercicio 6 (0,75 puntos) - Ecuación logarítmica

Resuelve: $2\log x-\log(x-16)=2$

Ejercicio 7 (0,75 puntos) - Ecuación exponencial

Resuelve: $3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27=0$

Ejercicio 8 (1 punto) - Sistema de ecuaciones logarítmicas

Resuelve: $\begin{cases} x+y=20 \\ 2\log x-\log y=1 \end{cases}$

Ejercicio 9 (1 punto) - Sistema de ecuaciones exponenciales

Resuelve: $\begin{cases} 2^{x+1}+5^y=41 \\ 3\cdot 2^x-5^{y+1}=-101 \end{cases}$

Ejercicio 10 (0,75 puntos) - Inecuaciones

a) (0,25p) $x^2-4x-5\leq 0$

b) (0,5p) $\frac{x^2-x-6}{x-1}\geq 0$

Ejercicio 11 (1,25 puntos) - Sistemas de inecuaciones

a) (0,5p) $\begin{cases} 2x - 3 \geq x + 1 \\ 10 - 3x > -8 \end{cases}$

b) (0,75p) $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - 2y > -2 \end{cases}$

Ejercicio 12 (1 punto) - Binomio de Newton

a) (0,5p) Desarrolla $(2x - 1)^4$.

b) (0,5p) Halla el término independiente del desarrollo de $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$.

Resolución

Solución Ejercicio 1

Primer sumando: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x+1+2x}{x(x+1)}=\dfrac{3x+1}{x(x+1)}$, que multiplicado por $\dfrac{x+1}{x}$ da $\dfrac{3x+1}{x^2}$.

Segundo sumando: $2-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2x-5}{x-1}$, que multiplicado por $\dfrac{x-1}{x}$ da $\dfrac{2x-5}{x}$.

$$\frac{3x+1}{x^2}-\frac{2x-5}{x}=\frac{3x+1-x(2x-5)}{x^2}=\frac{-2x^2+8x+1}{x^2}$$

Solución Ejercicio 2

Multiplicamos por 6:

$$3(x^2-1)-2x(x-3)=4 \implies 3x^2-3-2x^2+6x=4 \implies x^2+6x-7=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2} \implies x=1,\ x=-7$$

Solución Ejercicio 3

Cambio $t=x^2$: $4t^2-37t+9=0$.

$$t=\frac{37\pm\sqrt{1369-144}}{8}=\frac{37\pm 35}{8} \implies t=9,\ t=\frac{1}{4}$$

Deshacemos el cambio: $x^2=9 \implies x=\pm 3$ y $x^2=\dfrac{1}{4} \implies x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Soluciones: $x=-3,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 3$.

Solución Ejercicio 4

Denominador común $(x-1)(x+1)$:

$$(x+1)^2+(x-1)^2=\frac{10}{3}(x^2-1) \implies 2x^2+2=\frac{10}{3}(x^2-1) \implies 6x^2+6=10x^2-10 \implies x^2=4$$

Comprobación: $x=2$ y $x=-2$ no anulan ningún denominador y verifican la ecuación (con $x=2$: $3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$; con $x=-2$: $\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$).

Soluciones: $x=2$ y $x=-2$.

Solución Ejercicio 5

Elevamos al cuadrado: $x+5=(x-1)^2 \implies x+5=x^2-2x+1 \implies x^2-3x-4=0 \implies x=4,\ x=-1$.

- $x=4$: $\sqrt{9}=3=4-1$. Válida.
- $x=-1$: $\sqrt{4}=2\neq -2$. No válida.

Solución: $x=4$.

Solución Ejercicio 6

Agrupamos con las propiedades de los logaritmos y escribimos $2 = \log 100$:

$$\log \frac{x^2}{x-16} = \log 100 \implies x^2 = 100(x-16) \implies x^2 - 100x + 1600 = 0$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 6400}}{2} = \frac{100 \pm 60}{2} \implies x = 80,\ x = 20$$

Los dos valores cumplen $x > 16$, así que los argumentos son positivos y ambos son válidos.

Soluciones: $x = 20$ y $x = 80$.

Solución Ejercicio 7

Con $t = 3^x$ tenemos $3^{2x} = t^2$ y $3^{x+1} = 3t$:

$$t^2 - 12t + 27 = 0 \implies t = \frac{12 \pm 6}{2} \implies t = 9,\ t = 3$$

$3^x = 9 \implies x = 2$.

$3^x = 3 \implies x = 1$.

Soluciones: $x = 1$ y $x = 2$.

Solución Ejercicio 8

De la segunda ecuación: $\log \dfrac{x^2}{y} = \log 10 \implies x^2 = 10y$. De la primera, $y = 20 - x$:

$$x^2 = 10(20 - x) \implies x^2 + 10x - 200 = 0 \implies x = \frac{-10 \pm 30}{2} \implies x = 10,\ x = -20$$

Con $x = -20$ el logaritmo no existe. Con $x = 10$ se tiene $y = 10$ y comprobamos: $2\log 10 - \log 10 = 1$.

Solución: $x = 10$, $y = 10$.

Solución Ejercicio 9

Con $a = 2^x$ y $b = 5^y$ tenemos $2^{x+1} = 2a$ y $5^{y+1} = 5b$:

$$\begin{cases} 2a + b = 41 \\ 3a - 5b = -101 \end{cases}$$

De la primera, $b = 41 - 2a$. En la segunda: $3a - 205 + 10a = -101 \implies 13a = 104 \implies a = 8$, y $b = 25$.

$2^x = 8 \implies x = 3$ y $5^y = 25 \implies y = 2$.

Solución: $x = 3$, $y = 2$.

Solución Ejercicio 10

a) Raíces: $x^2 - 4x - 5 = 0 \implies (x-5)(x+1) = 0 \implies x = -1,\ x = 5$. La parábola es negativa entre las raíces y se anula en ellas.

Solución: $x \in [-1, 5]$.

b) Numerador: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, con raíces -2 y 3. El denominador se anula en $x = 1$ (no pertenece a la solución). Estudiamos el signo:

$(-\infty, -2)$: con $x = -3$, $\dfrac{6}{-4} < 0$. No cumple.

$(-2, 1)$: con $x = 0$, $\dfrac{-6}{-1} > 0$. Cumple.

$(1, 3)$: con $x = 2$, $\dfrac{-4}{1} < 0$. No cumple.

$(3, +\infty)$: con $x = 4$, $\dfrac{6}{3} > 0$. Cumple.

Los ceros del numerador sí se incluyen. Solución: $x \in [-2, 1) \cup [3, +\infty)$.

Solución Ejercicio 11

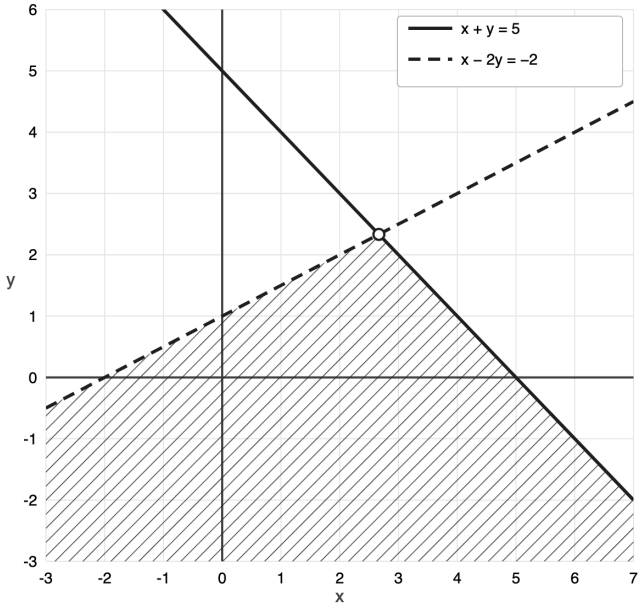
a) Primera: $x \geq 4$. Segunda: $-3x > -18 \implies x < 6$.

Solución: $x \in [4, 6)$.

b) Primera inecuación: recta $x + y = 5$ (continua), que pasa por $(5, 0)$ y $(0, 5)$. El origen cumple $0 \leq 5$: semiplano que contiene al origen.

Segunda inecuación: recta $x - 2y = -2$ (discontinua, desigualdad estricta), que pasa por $(-2, 0)$ y $(0, 1)$. El origen cumple $0 > -2$: semiplano que contiene al origen.

La solución es la región no acotada situada bajo las dos rectas, con vértice en su punto de corte $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$. Ese vértice no pertenece a la región, porque está sobre la recta discontinua.



Solución Ejercicio 12

a) Coeficientes de la fila 4 del triángulo de Pascal: $1, 4, 6, 4, 1$.

$$(2x - 1)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3 + 6(2x)^2 - 4(2x) + 1 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

b) Término general:

$$T_{k+1} = \binom{6}{k} (x^2)^{6-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \binom{6}{k} (-2)^k x^{12-3k}$$

Es independiente de x si $12 - 3k = 0 \implies k = 4$:

$$T_5 = \binom{6}{4}(-2)^4 = 15 \cdot 16 = 240$$