# Examen de ecuaciones, inecuaciones y binomio de Newton

## Ejercicio 1 (0,75 puntos) - Fracciones algebraicas

Opera y simplifica: $\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x-1}{x}+\frac{x+1}{x}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$

## Ejercicio 2 (0,75 puntos) - Ecuación de segundo grado

Resuelve: $\frac{x(x+2)}{3}-\frac{x^2-4}{4}=\frac{7}{4}$

## Ejercicio 3 (0,5 puntos) - Ecuación bicuadrada

Resuelve: $4x^4-65x^2+16=0$

## Ejercicio 4 (0,75 puntos) - Ecuación racional

Resuelve y comprueba las soluciones: $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x+2}=2$

## Ejercicio 5 (0,75 puntos) - Ecuación irracional

Resuelve y comprueba las soluciones: $\sqrt{x-1}=x-3$

## Ejercicio 6 (0,75 puntos) - Ecuación logarítmica

Resuelve: $2\log x-\log(x-9)=2$

## Ejercicio 7 (0,75 puntos) - Ecuación exponencial

Resuelve: $4^x-3\cdot 2^{x+2}+32=0$

## Ejercicio 8 (1 punto) - Sistema de ecuaciones logarítmicas

Resuelve: $\begin{cases}\log x+\log y=2\\ x-y=15\end{cases}$

## Ejercicio 9 (1 punto) - Sistema de ecuaciones exponenciales

Resuelve: $\begin{cases}2^{x+1}+3^{y-1}=17\\ 5\cdot 2^x-3^y=-7\end{cases}$

## Ejercicio 10 (0,75 puntos) - Inecuaciones

**a) (0,25p)** $x^2+2x-8>0$

**b) (0,5p)** $\frac{x^2-x-2}{x-3}\leq 0$

## Ejercicio 11 (1,25 puntos) - Sistemas de inecuaciones

**a) (0,5p)** $\begin{cases}3x-5\leq x+3\\ 4-3x<7\end{cases}$

**b) (0,75p)** $\begin{cases}x+y\geq 2\\ 2x-y<4\end{cases}$

## Ejercicio 12 (1 punto) - Binomio de Newton

**a) (0,5p)** Desarrolla $(3x-2)^4$.

**b) (0,5p)** Halla el término independiente del desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

# Resolución

## Solución Ejercicio 1

Primer sumando: $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-x}{x(x-1)}=\dfrac{x-2}{x(x-1)}$, que multiplicado por $\dfrac{x-1}{x}$ da $\dfrac{x-2}{x^2}$.

Segundo sumando: $1-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x-1}{x+1}$, que multiplicado por $\dfrac{x+1}{x}$ da $\dfrac{x-1}{x}$.

$$\frac{x-2}{x^2}+\frac{x-1}{x}=\frac{x-2+x(x-1)}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}$$

## Solución Ejercicio 2

Multiplicamos por $12$:

$$4x(x+2)-3(x^2-4)=21 \implies 4x^2+8x-3x^2+12=21 \implies x^2+8x-9=0$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{-8\pm 10}{2} \implies x=1,\ x=-9$$

## Solución Ejercicio 3

Cambio $t=x^2$: $4t^2-65t+16=0$.

$$t=\frac{65\pm\sqrt{4225-256}}{8}=\frac{65\pm 63}{8} \implies t=16,\ t=\frac{1}{4}$$

Deshacemos el cambio: $x^2=16 \implies x=\pm 4$ y $x^2=\dfrac{1}{4} \implies x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Soluciones: $x=-4,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 4$.

## Solución Ejercicio 4

Denominador común $(x-2)(x+2)$:

$$(x+1)(x+2)-(x-1)(x-2)=2(x^2-4) \implies 6x=2x^2-8 \implies x^2-3x-4=0 \implies x=4,\ x=-1$$

Comprobación: ninguno de los dos valores anula un denominador.

$x=4$: $\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{6}=2$. Válida.

$x=-1$: $0-\dfrac{-2}{1}=2$. Válida.

Soluciones: $x=-1$ y $x=4$.

## Solución Ejercicio 5

Elevamos al cuadrado: $x-1=(x-3)^2 \implies x-1=x^2-6x+9 \implies x^2-7x+10=0 \implies x=5,\ x=2$.

$x=5$: $\sqrt{4}=2=5-3$. Válida.

$x=2$: $\sqrt{1}=1\neq -1$. No válida.

Solución: $x=5$.

## Solución Ejercicio 6

Agrupamos con las propiedades de los logaritmos y escribimos $2=\log 100$:

$$\log\frac{x^2}{x-9}=\log 100 \implies x^2=100(x-9) \implies x^2-100x+900=0$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 3600}}{2} = \frac{100 \pm 80}{2} \implies x = 90,\ x = 10$$

Los dos valores cumplen $x > 9$, así que los argumentos son positivos y ambos son válidos.

Soluciones: $x = 10$ y $x = 90$.

## Solución Ejercicio 7

Con $t = 2^x$ tenemos $4^x = t^2$ y $2^{x+2} = 4t$:

$$t^2 - 12t + 32 = 0 \implies t = \frac{12 \pm 4}{2} \implies t = 8,\ t = 4$$

$2^x = 8 \implies x = 3$.

$2^x = 4 \implies x = 2$.

Soluciones: $x = 2$ y $x = 3$.

## Solución Ejercicio 8

De la primera ecuación: $\log(xy) = \log 100 \implies xy = 100$. De la segunda, $x = y + 15$:

$$(y + 15)y = 100 \implies y^2 + 15y - 100 = 0 \implies y = \frac{-15 \pm 25}{2} \implies y = 5,\ y = -20$$

Con $y = -20$ el logaritmo no existe. Con $y = 5$ se tiene $x = 20$ y comprobamos: $\log 20 + \log 5 = \log 100 = 2$.

Solución: $x = 20$, $y = 5$.

## Solución Ejercicio 9

Con $a = 2^x$ y $b = 3^y$ tenemos $2^{x+1} = 2a$ y $3^{y-1} = \frac{b}{3}$:

$$\begin{cases} 2a + \dfrac{b}{3} = 17 \\ 5a - b = -7 \end{cases} \implies \begin{cases} 6a + b = 51 \\ 5a - b = -7 \end{cases}$$

Sumando: $11a = 44 \implies a = 4$, y $b = 51 - 24 = 27$.

$2^x = 4 \implies x = 2$ y $3^y = 27 \implies y = 3$.

Solución: $x = 2$, $y = 3$.

## Solución Ejercicio 10

**a)** Raíces: $x^2 + 2x - 8 = 0 \implies (x + 4)(x - 2) = 0 \implies x = -4,\ x = 2$. La parábola es positiva fuera de las raíces y la desigualdad es estricta.

Solución: $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

**b)** Numerador: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, con raíces $-1$ y $2$. El denominador se anula en $x = 3$ (no pertenece a la solución). Estudiamos el signo:

$(-\infty, -1)$: con $x = -2$, $\dfrac{4}{-5} < 0$. Cumple.

$(-1, 2)$: con $x = 0$, $\dfrac{-2}{-3} > 0$. No cumple.

$(2, 3)$: con $x = 2{,}5$, el numerador es positivo y el denominador negativo. Cumple.

$(3, +\infty)$: con $x = 4$, $\dfrac{10}{1} > 0$. No cumple.

Los ceros del numerador sí se incluyen. Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup [2, 3)$.

## Solución Ejercicio 11

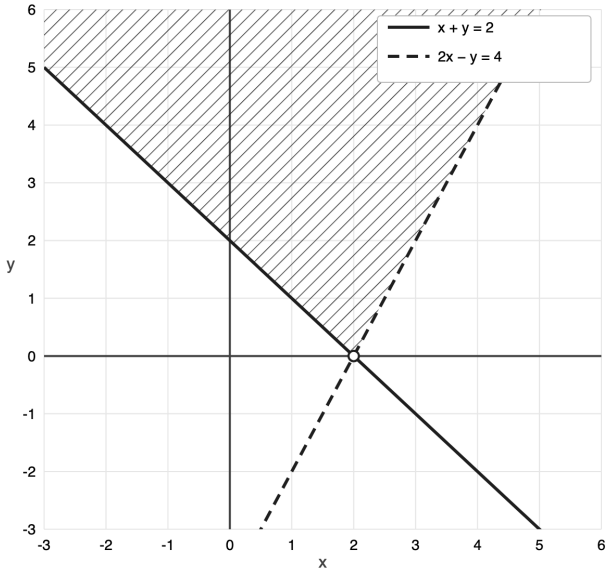
**a)** Primera: $2x \leq 8 \implies x \leq 4$. Segunda: $-3x < 3 \implies x > -1$.

Solución: $x \in (-1, 4]$.

**b)** Primera inecuación: recta $x + y = 2$ (continua), que pasa por $(2, 0)$ y $(0, 2)$. El origen no cumple $0 \geq 2$: semiplano que no contiene al origen.

Segunda inecuación: recta $2x - y = 4$ (discontinua, desigualdad estricta), que pasa por $(2, 0)$ y $(0, -4)$. El origen cumple $0 < 4$: semiplano que contiene al origen.

La solución es la región no acotada situada sobre las dos rectas, con vértice en su punto de corte $(2, 0)$. Ese vértice no pertenece a la región, porque está sobre la recta discontinua.




## Solución Ejercicio 12

**a)** Coeficientes de la fila $4$ del triángulo de Pascal: $1, 4, 6, 4, 1$.

$$(3x - 2)^4 = (3x)^4 - 4(3x)^3 \cdot 2 + 6(3x)^2 \cdot 4 - 4(3x) \cdot 8 + 16 = 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16$$

**b)** Término general:

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} (x^2)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{9}{k} x^{18-3k}$$

Es independiente de $x$ si $18 - 3k = 0 \implies k = 6$:

$$T_7 = \binom{9}{6} = 84$$