Prueba de evaluación de matemáticas

Ejercicio 1 (1,5 puntos) - Indeterminaciones en un punto

Resuelve las siguientes indeterminaciones:

a) (0,75p) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1}$

b) (0,75p) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

Ejercicio 2 (1 punto) - Expresiones racionales

a) (0,5p) Factoriza y reduce a su mínima expresión: $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

b) (0,5p) Efectúa la resta y simplifica el resultado: $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+6}{x^2-4}$

Ejercicio 3 (1 punto) - Extracción de cartas

De una baraja española de 40 cartas se extraen dos cartas, una tras otra y sin devolver la primera al mazo.

a) (0,5p) Calcula la probabilidad de que las dos sean de oros.

b) (0,5p) Calcula la probabilidad de que al menos una de ellas sea una figura (sota, caballo o rey).

Ejercicio 4 (0,5 puntos) - Cálculo sin calculadora

Sabiendo que $\log(2) \approx 0{,}301$ y $\log(3) \approx 0{,}477$, calcula el valor aproximado de:

$$\log\left(\frac{\sqrt{72}}{5}\right)$$

Ejercicio 5 (1 punto) - Funciones

Estudia el dominio de las siguientes funciones:

a) (0,5p) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$

b) (0,5p) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x-2)}$

Ejercicio 6 (1 punto) - Problema de edades

Las edades de tres hermanos suman 35 años. La edad del mayor es 5 años menos que la suma de las edades de los otros dos, y la suma de las edades de los dos mayores supera en 3 años al triple de la edad del pequeño. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo por Gauss para hallar la edad de cada hermano.

Ejercicio 7 (1,25 puntos) - Tiempos de un trayecto

El tiempo que tarda un autobús en hacer su recorrido sigue una distribución normal con desviación típica de 4 minutos. Se sabe que el $15{,}87\%$ de los trayectos dura más de 34 minutos.

a) (0,5p) Calcula el tiempo medio del recorrido.

b) (0,75p) ¿Qué porcentaje de trayectos dura entre 25 y 32 minutos?

Ejercicio 8 (0,75 puntos) - Asíntotas con parámetros

Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + 3}{x + b}$ tenga una asíntota vertical en $x = 2$ y una asíntota oblicua de pendiente 3. Escribe la ecuación de esa asíntota oblicua.

Ejercicio 9 (0,5 puntos) - Valor exacto

Calcula el valor exacto de la siguiente expresión aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_3\left(\sqrt{27}\right) + \log_2\left(\frac{1}{8}\right) - \ln\left(e^5\right) + \log_{25}(5)$$

Ejercicio 10 (1,5 puntos) - Prueba diagnóstica

Una enfermedad afecta al 2% de la población. Una prueba para detectarla da positivo en el 95% de las personas enfermas, pero también da positivo, por error, en el 10% de las personas sanas.

a) (0,75p) ¿Qué probabilidad hay de que una persona elegida al azar dé positivo?

b) (0,75p) Una persona ha dado positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que esté realmente enferma? Comenta el resultado.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$. Factorizamos numerador y denominador (por Ruffini):

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}$$

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{1+1}=1$$

Solución Ejercicio 2

a) Sacamos factor común x y usamos las identidades notables:

$$\frac{x^3-4x}{x^3+4x^2+4x}=\frac{x(x^2-4)}{x(x^2+4x+4)}=\frac{x(x-2)(x+2)}{x(x+2)^2}=\frac{x-2}{x+2}$$

b) El mínimo común denominador es $x^2-4=(x-2)(x+2)$:

$$\frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+6}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x+4-x-6}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2}$$

Solución Ejercicio 3

La baraja tiene 10 cartas de cada palo y 12 figuras.

a) Sea O_i el suceso «la carta i es de oros»:

$$P(O_1\cap O_2)=P(O_1)\cdot P(O_2\mid O_1)=\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}=\frac{90}{1560}=\frac{3}{52}\approx 0{,}0577$$

b) Usamos el suceso contrario, «ninguna es figura», con 28 cartas que no son figura:

$$P(\text{ninguna figura})=\frac{28}{40}\cdot\frac{27}{39}=\frac{756}{1560}=\frac{63}{130}$$

$$P(\text{al menos una figura})=1-\frac{63}{130}=\frac{67}{130}\approx 0{,}5154$$

Solución Ejercicio 4

Descomponemos $72=2^3\cdot 3^2$ y escribimos $5=\dfrac{10}{2}$:

$$\log\left(\frac{\sqrt{72}}{5}\right)=\frac{1}{2}\log(72)-\log(5)=\frac{1}{2}\big(3\log(2)+2\log(3)\big)-\big(1-\log(2)\big)$$

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{2}(0{,}903+0{,}954)-(1-0{,}301)=0{,}9285-0{,}699=0{,}2295$$

Solución Ejercicio 5

a) El radicando debe ser mayor o igual que cero y el denominador no nulo. Las raíces de numerador y denominador son $x=-1$ y $x=3$. Estudiamos el signo:

$$\frac{x+1}{x-3}\geq 0 \text{ en } (-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$$

Incluimos $x = -1$ (el radicando vale 0) y excluimos $x = 3$ (anula el denominador):

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$$

b) El argumento del logaritmo debe ser positivo y el logaritmo no puede valer cero:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \qquad \ln(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\mathrm{Dom}(g) = (2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Solución Ejercicio 6

Llamamos a, b y c a las edades del mayor, del mediano y del pequeño:

$$\begin{cases} a + b + c = 35 \\ a = b + c - 5 \\ a + b = 3c + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 35 \\ a - b - c = -5 \\ a + b - 3c = 3 \end{cases}$$

Hacemos ceros en la primera columna:

$$F_2 \leftarrow F_2 - F_1 \Rightarrow -2b - 2c = -40$$

$$F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \Rightarrow -4c = -32$$

El sistema ya está escalonado. Resolvemos de abajo arriba:

$$c = 8 \qquad -2b - 16 = -40 \Rightarrow b = 12 \qquad a = 35 - 12 - 8 = 15$$

Los hermanos tienen 15, 12 y 8 años.

Solución Ejercicio 7

$X \sim N(\mu, 4)$, donde X es la duración del trayecto en minutos.

a) Tipificamos el dato conocido:

$$P(X > 34) = P\left(Z > \frac{34 - \mu}{4}\right) = 0{,}1587 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{34 - \mu}{4}\right) = 0{,}8413$$

En la tabla, $P(Z \leq 1) = 0{,}8413$, así que:

$$\frac{34 - \mu}{4} = 1 \Rightarrow \mu = 30 \text{ minutos}$$

b) Con $X \sim N(30, 4)$:

$$P(25 \leq X \leq 32) = P\left(\frac{25 - 30}{4} \leq Z \leq \frac{32 - 30}{4}\right) = P(-1{,}25 \leq Z \leq 0{,}5) = P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -1{,}25)$$

$$= 0{,}6915 - (1 - 0{,}8944) = 0{,}6915 - 0{,}1056 = 0{,}5859 \quad (58{,}59\%)$$

Solución Ejercicio 8

Asíntota vertical. El denominador debe anularse en $x = 2$:

$$2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

Pendiente de la oblicua.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + 3}{x^2 - 2x} = a \Rightarrow a = 3$$

Comprobamos que el numerador no se anula en $x = 2$: $3 \cdot 4 + 3 = 15 \neq 0$, así que la asíntota vertical existe.

Ordenada en el origen.

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^2 + 3}{x - 2} - 3x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 3 - 3x^2 + 6x}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x + 3}{x - 2} = 6$$

La asíntota oblicua es $y = 3x + 6$.

Solución Ejercicio 9

Calculamos cada término por separado:

$$\log_3 \left(\sqrt{27} \right) = \log_3 \left(3^{3/2} \right) = \frac{3}{2} \qquad \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = \log_2 \left(2^{-3} \right) = -3$$

$$\ln \left(e^5 \right) = 5 \qquad \log_{25}(5) = \frac{1}{2} \text{ porque } 25^{1/2} = 5$$

Sumamos:

$$\frac{3}{2} - 3 - 5 + \frac{1}{2} = 2 - 8 = -6$$

Solución Ejercicio 10

Sucesos: E (estar enfermo) y $+$ (dar positivo). Datos:

$$P(E) = 0{,}02 \qquad P(\bar{E}) = 0{,}98 \qquad P(+ \mid E) = 0{,}95 \qquad P(+ \mid \bar{E}) = 0{,}10$$

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(+) = 0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(E \mid +) = \frac{P(E) \cdot P(+ \mid E)}{P(+)} = \frac{0{,}019}{0{,}117} \approx 0{,}1624 \quad (16{,}24\%)$$

Aunque la prueba detecta casi a todos los enfermos, solo uno de cada seis positivos está enfermo: como la enfermedad es poco frecuente, la mayoría de positivos son falsos positivos de personas sanas.