Prueba de evaluación de matemáticas

Ejercicio 1 (2 puntos) - Límites

Calcula los siguientes límites resolviendo las indeterminaciones:

a) (0,5p) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

b) (0,5p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$

c) (0,5p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 3}{x - 1} \right)^{x}$

d) (0,5p) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

Ejercicio 2 (1,5 puntos) - Continuidad y derivabilidad

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ x + 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) (0,75p) Estudia su continuidad.

b) (0,75p) Estudia su derivabilidad.

Ejercicio 3 (1 punto) - Ecuaciones trigonométricas

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (0,5p) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

b) (0,5p) $\sin 2x = \cos x$

Ejercicio 4 (1 punto) - Números complejos

Calcula las raíces cuartas del número complejo $z = -8 + 8\sqrt{3}\,i$ y exprésalas en forma polar y en forma binómica.

Ejercicio 5 (1 punto) - Cónicas

Obtén la ecuación reducida de las siguientes cónicas, clasifícalas e indica sus elementos principales:

a) (0,5p) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$

b) (0,5p) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$

Ejercicio 6 (2,5 puntos) - Estudio de una función

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$:

a) (0,75p) Estudia su dominio, su continuidad y sus asíntotas.
b) (1p) Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos.
c) (0,75p) Estudia su curvatura y sus puntos de inflexión.

Ejercicio 7 (1 punto) - Punto simétrico

Halla el punto simétrico de $P(4,1)$ respecto de la recta $r: x-2y+3=0$.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Sustituyendo obtenemos $\frac{0}{0}$. Factorizamos numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{4}{1}=4$$

b) Es una indeterminación $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

c) La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$: indeterminación 1^∞. Usamos $\lim f^g = e^{\lim g\,(f-1)}$:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{4}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x-1}=4$$

Por tanto, el límite vale e^4.

d) Sustituyendo obtenemos $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Solución Ejercicio 2

a) Cada trozo es un polinomio, así que f es continua en cada intervalo abierto. Estudiamos los puntos de cambio.

En $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2,\quad \lim_{x\to 1^+}2x=2,\quad f(1)=2$$

Los tres valores coinciden: f es continua en $x=1$.

En $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}2x=6,\quad \lim_{x\to 3^+}(x+4)=7$$

Los límites laterales son distintos: en $x=3$ hay una discontinuidad de salto finito.

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

b) La derivada en cada trozo es:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ 2 & \text{si } 1<x<3\\ 1 & \text{si } x>3\end{cases}$$

En $x = 1$, f es continua y las derivadas laterales son $f'(1^-) = 2 \cdot 1 = 2$ y $f'(1^+) = 2$. Coinciden, así que f es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 2$.

En $x = 3$, f no es continua, así que no es derivable.

Conclusión: f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Solución Ejercicio 3

a) Hacemos el cambio $t = \cos x$: $2t^2 - t - 1 = 0$.

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow t = 1 \text{ o } t = -\frac{1}{2}$$

Si $\cos x = 1$: $x = 0^\circ + 360^\circ k$.

Si $\cos x = -\frac{1}{2}$: $x = 120^\circ + 360^\circ k$ o $x = 240^\circ + 360^\circ k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

b) Usamos $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x \, (2 \sin x - 1) = 0$$

Si $\cos x = 0$: $x = 90^\circ + 360^\circ k$ o $x = 270^\circ + 360^\circ k$.

Si $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = 30^\circ + 360^\circ k$ o $x = 150^\circ + 360^\circ k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Solución Ejercicio 4

Pasamos z a forma polar:

$$|z| = \sqrt{(-8)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$$

El afijo $(-8, 8\sqrt{3})$ está en el segundo cuadrante y $\tan \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\sqrt{3}$, así que $\alpha = 120^\circ$. Por tanto, $z = 16_{120^\circ}$.

Las raíces cuartas tienen módulo $\sqrt[4]{16} = 2$ y argumentos

$$\frac{120^\circ + 360^\circ k}{4} = 30^\circ + 90^\circ k, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

1. $2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$
2. $2_{120^\circ} = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -1 + \sqrt{3}\, i$
3. $2_{210^\circ} = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\sqrt{3} - i$
4. $2_{300^\circ} = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 1 - \sqrt{3}\, i$

Solución Ejercicio 5

a) Agrupamos y completamos cuadrados:

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) = 11$$

$$4\left[(x-2)^2 - 4\right] + 9\left[(y+1)^2 - 1\right] = 11 \Rightarrow 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

Dividiendo entre 36:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

Es una elipse de centro $(2,-1)$, semieje mayor $a=3$ (horizontal) y semieje menor $b=2$. Como $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, sus focos son $F(2\pm\sqrt{5},-1)$.

b) Agrupamos y completamos cuadrados:

$$(x^2-4x)-(y^2-6y)=9$$

$$\left[(x-2)^2-4\right]-\left[(y-3)^2-9\right]=9\Rightarrow(x-2)^2-(y-3)^2=4$$

Dividiendo entre 4:

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

Es una hipérbola equilátera ($a=b=2$) de centro $(2,3)$ y eje real horizontal. Como $c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{2}$, sus focos son $F(2\pm2\sqrt{2},3)$. Sus asíntotas son $y-3=\pm(x-2)$, es decir, $y=x+1$ e $y=-x+5$.

Solución Ejercicio 6

a) El denominador se anula en $x=1$, así que $\mathrm{Dom}\,f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Al ser un cociente de polinomios, f es continua en todo su dominio.

Asíntota vertical en $x=1$:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty,\quad\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$$

No tiene asíntota horizontal, porque $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\pm\infty$.

Asíntota oblicua $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

La asíntota oblicua es $y=x+1$.

b) Derivamos:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=0$ o $x=2$. El denominador es siempre positivo, así que el signo de f' es el de $x(x-2)$:

1. En $(-\infty,0)$: $f'>0$, f es creciente.

2. En $(0,1)$ y en $(1,2)$: $f' < 0$, f es decreciente.
3. En $(2,+\infty)$: $f' > 0$, f es creciente.

Hay un máximo relativo en $(0, f(0)) = (0,0)$ y un mínimo relativo en $(2, f(2)) = (2,4)$.

c) Derivamos de nuevo:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

f'' no se anula nunca, así que no hay puntos de inflexión.

1. En $(-\infty,1)$: $f'' < 0$, f es cóncava (forma $\cap$).
2. En $(1,+\infty)$: $f'' > 0$, f es convexa (forma $\cup$).

La curvatura cambia en $x = 1$, pero no es punto de inflexión porque no pertenece al dominio.

Solución Ejercicio 7

Un vector normal de r es $\vec{n} = (1,-2)$, que es vector director de la recta s perpendicular a r que pasa por P:

$$s: \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow 2x + y - 9 = 0$$

El punto medio M entre P y su simétrico es la intersección de r y s:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 3 \Rightarrow M(3,3)$$

Si $P'(x', y')$ es el simétrico, M es el punto medio de PP':

$$\frac{4 + x'}{2} = 3 \Rightarrow x' = 2, \qquad \frac{1 + y'}{2} = 3 \Rightarrow y' = 5$$

El punto simétrico es $P'(2,5)$.