Prueba de evaluación de matemáticas

Ejercicio 1 (1,5 puntos) - Indeterminaciones en un punto

Resuelve las siguientes indeterminaciones:

a) (0,75p) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$

b) (0,75p) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + x} - \sqrt{9 - x}}{x}$

Ejercicio 2 (1 punto) - Expresiones racionales

a) (0,5p) Factoriza y reduce a su mínima expresión: $\dfrac{x^3 - 9x}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

b) (0,5p) Efectúa la resta y simplifica el resultado: $\dfrac{3}{x - 3} - \dfrac{2x + 12}{x^2 - 9}$

Ejercicio 3 (1 punto) - Extracción de cartas

De una baraja española de 40 cartas se extraen dos cartas, una tras otra y sin devolver la primera al mazo.

a) (0,5p) Calcula la probabilidad de que las dos sean ases.

b) (0,5p) Calcula la probabilidad de que al menos una de ellas sea de oros.

Ejercicio 4 (0,5 puntos) - Cálculo sin calculadora

Sabiendo que $\log(2) \approx 0{,}301$ y $\log(3) \approx 0{,}477$, calcula el valor aproximado de:

$$\log\left(\frac{\sqrt{45}}{2}\right)$$

Ejercicio 5 (1 punto) - Funciones

Estudia el dominio de las siguientes funciones:

a) (0,5p) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 4}}$

b) (0,5p) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x + 1)}$

Ejercicio 6 (1 punto) - Problema de dinero

Ana, Bea y Carlos tienen entre los tres 60 €. Lo que tiene Ana es 10 € menos que lo que tienen entre Bea y Carlos, y lo que tienen Ana y Carlos juntos es el doble de lo que tiene Bea. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo por Gauss para hallar el dinero de cada uno.

Ejercicio 7 (1,25 puntos) - Duración de baterías

La duración de un modelo de batería sigue una distribución normal con desviación típica de 5 horas. Se sabe que el $2{,}28\%$ de las baterías dura más de 80 horas.

a) (0,5p) Calcula la duración media de las baterías.

b) (0,75p) ¿Qué porcentaje de baterías dura entre 65 y 77 horas?

Ejercicio 8 (0,75 puntos) - Asíntotas con parámetros

Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \dfrac{ax^2 - 1}{x + b}$ tenga una asíntota vertical en $x = -1$ y una asíntota oblicua de pendiente 2. Escribe la ecuación de esa asíntota oblicua.

Ejercicio 9 (0,5 puntos) - Valor exacto

Calcula el valor exacto de la siguiente expresión aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_2\left(\sqrt{32}\right) + \log_3\left(\frac{1}{9}\right) - \ln\left(e^3\right) + \log_4(2)$$

Ejercicio 10 (1,5 puntos) - Piezas defectuosas

Una fábrica tiene dos máquinas: la máquina A produce el 60% de las piezas y la máquina B el resto. El 3% de las piezas de A y el 5% de las de B son defectuosas.

a) (0,75p) ¿Qué probabilidad hay de que una pieza elegida al azar sea defectuosa?

b) (0,75p) Una pieza ha resultado defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que la haya fabricado la máquina B? Comenta el resultado.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$. Factorizamos numerador y denominador (por Ruffini):

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+2x+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(9+x)-(9-x)}{x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}$$

Solución Ejercicio 2

a) Sacamos factor común x y usamos las identidades notables:

$$\frac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x}=\frac{x(x^2-9)}{x(x^2-6x+9)}=\frac{x(x-3)(x+3)}{x(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}$$

b) El mínimo común denominador es $x^2-9=(x-3)(x+3)$:

$$\frac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)}-\frac{2x+12}{(x-3)(x+3)}=\frac{3x+9-2x-12}{(x-3)(x+3)}=\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

Solución Ejercicio 3

La baraja tiene 4 ases y 10 cartas de cada palo.

a) Sea A_i el suceso «la carta i es un as»:

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{12}{1560}=\frac{1}{130}\approx 0{,}0077$$

b) Usamos el suceso contrario, «ninguna es de oros», con 30 cartas que no son de oros:

$$P(\text{ninguna de oros})=\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}=\frac{870}{1560}=\frac{29}{52}$$

$$P(\text{al menos una de oros})=1-\frac{29}{52}=\frac{23}{52}\approx 0{,}4423$$

Solución Ejercicio 4

Descomponemos $45=3^2\cdot 5$ y usamos $\log(5)=\log\left(\frac{10}{2}\right)=1-\log(2)$:

$$\log\left(\frac{\sqrt{45}}{2}\right)=\frac{1}{2}\log(45)-\log(2)=\frac{1}{2}\big(2\log(3)+1-\log(2)\big)-\log(2)$$

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{2}(0{,}954+0{,}699)-0{,}301=0{,}8265-0{,}301=0{,}5255$$

Solución Ejercicio 5

a) El radicando debe ser mayor o igual que cero y el denominador no nulo. Las raíces de numerador y denominador son $x = 2$ y $x = -4$. Estudiamos el signo:

$$\frac{x-2}{x+4} \geq 0 \text{ en } (-\infty, -4) \cup [2, +\infty)$$

Excluimos $x = -4$ (anula el denominador) e incluimos $x = 2$ (el radicando vale 0):

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -4) \cup [2, +\infty)$$

b) El argumento del logaritmo debe ser positivo y el logaritmo no puede valer cero:

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \qquad \ln(x+1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Dom}(g) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Solución Ejercicio 6

Llamamos a, b y c al dinero de Ana, Bea y Carlos:

$$\begin{cases} a + b + c = 60 \\ a = b + c - 10 \\ a + c = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 60 \\ a - b - c = -10 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

Hacemos ceros en la primera columna:

$$F_2 \leftarrow F_2 - F_1 \Rightarrow -2b - 2c = -70$$

$$F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \Rightarrow -3b = -60$$

Resolvemos:

$$b = 20 \qquad -40 - 2c = -70 \Rightarrow c = 15 \qquad a = 60 - 20 - 15 = 25$$

Ana tiene 25 €, Bea 20 € y Carlos 15 €.

Solución Ejercicio 7

$X \sim N(\mu, 5)$, donde X es la duración de la batería en horas.

a) Tipificamos el dato conocido:

$$P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80 - \mu}{5}\right) = 0{,}0228 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{80 - \mu}{5}\right) = 0{,}9772$$

En la tabla, $P(Z \leq 2) = 0{,}9772$, así que:

$$\frac{80 - \mu}{5} = 2 \Rightarrow \mu = 70 \text{ horas}$$

b) Con $X \sim N(70, 5)$:

$$P(65 \leq X \leq 77) = P\left(\frac{65 - 70}{5} \leq Z \leq \frac{77 - 70}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1{,}4) = P(Z \leq 1{,}4) - P(Z \leq -1)$$

$$= 0{,}9192 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}9192 - 0{,}1587 = 0{,}7605 \quad (76{,}05\%)$$

Solución Ejercicio 8

Asíntota vertical. El denominador debe anularse en $x = -1$:

$$-1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

Pendiente de la oblicua.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 - 1}{x^2 + x} = a \Rightarrow a = 2$$

Comprobamos que el numerador no se anula en $x = -1$: $2 \cdot 1 - 1 = 1 \neq 0$, así que la asíntota vertical existe.

Ordenada en el origen.

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2 - 1}{x + 1} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 1 - 2x^2 - 2x}{x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x - 1}{x + 1} = -2$$

La asíntota oblicua es $y = 2x - 2$.

Solución Ejercicio 9

Calculamos cada término por separado:

$$\log_2\left(\sqrt{32}\right) = \log_2\left(2^{5/2}\right) = \frac{5}{2} \qquad \log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3\left(3^{-2}\right) = -2$$

$$\ln\left(e^3\right) = 3 \qquad \log_4(2) = \frac{1}{2} \text{ porque } 4^{1/2} = 2$$

Sumamos:

$$\frac{5}{2} - 2 - 3 + \frac{1}{2} = 3 - 5 = -2$$

Solución Ejercicio 10

Sucesos: A y B (máquina que fabrica la pieza) y D (la pieza es defectuosa). Datos:

$$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}4 \qquad P(D \mid A) = 0{,}03 \qquad P(D \mid B) = 0{,}05$$

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}018 + 0{,}02 = 0{,}038$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(B \mid D) = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}038} \approx 0{,}5263 \quad (52{,}63\%)$$

Aunque la máquina B fabrica menos piezas que la A, más de la mitad de las piezas defectuosas salen de ella, porque su porcentaje de defectos es mayor.