Prueba de evaluación de matemáticas

Ejercicio 1 (2 puntos) - Límites

Calcula los siguientes límites resolviendo las indeterminaciones:

a) (0,5p) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

b) (0,5p) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right)$

c) (0,5p) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{2x - 1} \right)^{x}$

d) (0,5p) $\lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}$

Ejercicio 2 (1,5 puntos) - Continuidad y derivabilidad

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 6 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ x + 6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) (0,75p) Estudia su continuidad.

b) (0,75p) Estudia su derivabilidad.

Ejercicio 3 (1 punto) - Ecuaciones trigonométricas

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (0,5p) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

b) (0,5p) $\sin 2x = \sin x$

Ejercicio 4 (1 punto) - Números complejos

Calcula $z = (1 - i)^6$ usando la forma polar y halla las raíces cúbicas de z, expresándolas en forma polar y en forma binómica.

Ejercicio 5 (1 punto) - Cónicas

Obtén la ecuación reducida de las siguientes cónicas, clasifícalas e indica sus elementos principales:

a) (0,5p) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$

b) (0,5p) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$

Ejercicio 6 (2,5 puntos) - Estudio de una función

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$:

a) (0,75p) Estudia su dominio, su continuidad y sus asíntotas.

b) (1p) Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos.

c) (0,75p) Estudia su curvatura y sus puntos de inflexión.

Ejercicio 7 (1 punto) - Punto simétrico

Halla el punto simétrico de $P(5,4)$ respecto de la recta $r: 2x + y - 4 = 0$.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Sustituyendo obtenemos $\frac{0}{0}$. Factorizamos numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{6}{1}=6$$

b) Es una indeterminación $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+5x)-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$$

c) La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$: indeterminación 1^∞. Usamos $\lim f^g=e^{\lim g\,(f-1)}$:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{2}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x-1}=1$$

Por tanto, el límite vale $e^1=e$.

d) Sustituyendo obtenemos $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x+4)-9}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Solución Ejercicio 2

a) Cada trozo es un polinomio, así que f es continua en cada intervalo abierto. Estudiamos los puntos de cambio.

En $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-}(x^2-2)=2,\quad \lim_{x\to 2^+}(4x-6)=2,\quad f(2)=2$$

Los tres valores coinciden: f es continua en $x=2$.

En $x=4$:

$$\lim_{x\to 4^-}(4x-6)=10,\quad \lim_{x\to 4^+}(x+6)=10,\quad f(4)=10$$

Los tres valores coinciden: f es continua en $x=4$.

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$.

b) La derivada en cada trozo es:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<2\\ 4 & \text{si } 2<x<4\\ 1 & \text{si } x>4\end{cases}$$

En $x=2$, f es continua y las derivadas laterales son $f'(2^-)=2\cdot 2=4$ y $f'(2^+)=4$. Coinciden, así que f es derivable en $x=2$ y $f'(2)=4$.

En $x=4$, f es continua pero las derivadas laterales son $f'(4^-)=4$ y $f'(4^+)=1$. Son distintas: hay un punto anguloso y f no es derivable en $x=4$.

Conclusión: f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Solución Ejercicio 3

a) Hacemos el cambio $t = \sin x$: $2t^2 + t - 1 = 0$.

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ o } t = -1$$

Si $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = 30^\circ + 360^\circ k$ o $x = 150^\circ + 360^\circ k$.

Si $\sin x = -1$: $x = 270^\circ + 360^\circ k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

b) Usamos $\sin 2x = 2\sin x \cos x$:

$$2\sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x\,(2\cos x - 1) = 0$$

Si $\sin x = 0$: $x = 0^\circ + 360^\circ k$ o $x = 180^\circ + 360^\circ k$.

Si $\cos x = \frac{1}{2}$: $x = 60^\circ + 360^\circ k$ o $x = 300^\circ + 360^\circ k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Solución Ejercicio 4

Pasamos $1 - i$ a forma polar:

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

El afijo $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante y $\tan\alpha = \frac{-1}{1} = -1$, así que $\alpha = 315^\circ$. Por tanto, $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$.

Elevamos a la sexta: el módulo queda $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$ y el argumento $6 \cdot 315^\circ = 1890^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 90^\circ$:

$$z = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^6 = 8_{1890^\circ} = 8_{90^\circ} = 8i$$

Las raíces cúbicas tienen módulo $\sqrt[3]{8} = 2$ y argumentos

$$\frac{90^\circ + 360^\circ k}{3} = 30^\circ + 120^\circ k, \quad k = 0, 1, 2$$

1. $2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$
2. $2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$
3. $2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i$

Solución Ejercicio 5

a) Agrupamos y completamos cuadrados:

$$9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = 11$$

$$9\left[(x+1)^2 - 1\right] + 4\left[(y-2)^2 - 4\right] = 11 \Rightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 36$$

Dividiendo entre 36:

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

Es una elipse de centro $(-1,2)$, semieje mayor $a=3$ (vertical) y semieje menor $b=2$. Como $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, sus focos son $F(-1,2\pm\sqrt{5})$.

b) Solo aparece y al cuadrado, así que completamos el cuadrado en y:

$$(y-2)^2-4-8x+12=0\Rightarrow (y-2)^2=8x-8=8(x-1)$$

Es una parábola de vértice $V(1,2)$ y eje horizontal $y=2$, abierta hacia la derecha. Comparando con $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, tenemos $2p=8$, es decir, $p=4$.

Su foco es $F\left(1+\frac{p}{2},2\right)=F(3,2)$ y su directriz es $x=1-\frac{p}{2}=-1$.

Solución Ejercicio 6

a) El denominador se anula en $x=1$, así que $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Al ser un cociente de polinomios, f es continua en todo su dominio.

Asíntota vertical en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3}{x-1}=+\infty$$

No tiene asíntota horizontal, porque $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3}{x-1}=\pm\infty$.

Asíntota oblicua $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3}{x^2-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$$

La asíntota oblicua es $y=x+1$.

b) Derivamos:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=-1$ o $x=3$. El denominador es siempre positivo, así que el signo de f' es el de $(x+1)(x-3)$:

1. En $(-\infty,-1)$: $f'>0$, f es creciente.
2. En $(-1,1)$ y en $(1,3)$: $f'<0$, f es decreciente.
3. En $(3,+\infty)$: $f'>0$, f es creciente.

Hay un máximo relativo en $(-1,f(-1))=(-1,-2)$ y un mínimo relativo en $(3,f(3))=(3,6)$.

c) Derivamos de nuevo:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)^2-2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}=\frac{8}{(x-1)^3}$$

f'' no se anula nunca, así que no hay puntos de inflexión.

1. En $(-\infty, 1)$: $f'' < 0$, f es cóncava (forma $\cap$).
2. En $(1, +\infty)$: $f'' > 0$, f es convexa (forma $\cup$).

La curvatura cambia en $x = 1$, pero no es punto de inflexión porque no pertenece al dominio.

Solución Ejercicio 7

Un vector normal de r es $\vec{n} = (2, 1)$, que es vector director de la recta s perpendicular a r que pasa por P:

$$s: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

El punto medio M entre P y su simétrico es la intersección de r y s:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ y = 2 \Rightarrow M(1, 2)$$

Si $P'(x', y')$ es el simétrico, M es el punto medio de PP':

$$\frac{5 + x'}{2} = 1 \Rightarrow x' = -3, \qquad \frac{4 + y'}{2} = 2 \Rightarrow y' = 0$$

El punto simétrico es $P'(-3, 0)$.