



Examen funciones, límites y derivadas - 1 bachillerato

Bloque 1: cálculo de Límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 7x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 2} \right)^{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x}{x^2 + 3x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 4}{5x^3 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - \frac{x^2 - 1}{x + 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x} - 1}{3x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 5}{2x^2 - 1} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$$

Bloque 2: continuidad y derivabilidad

Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de los parámetros a y b para que la función sea continua y derivable en todo su dominio.

Bloque 3: estudio de funciones

Dada la siguiente función, realiza su estudio analítico completo detallando los siguientes apartados y realiza un esbozo de su representación gráfica:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

- Dominio y Recorrido.
- Asíntotas.
- Monotonía y extremos relativos.
- Curvatura y puntos de inflexión.



Bloque 4: cálculo de derivadas

Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = (3x^2 - 5x + 2)^4$

2. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$

3. $f(x) = e^{5x^2 - x}$

4. $f(x) = \ln(4x^3 + 2x)$

5. $f(x) = \sin^3(2x)$

6. $f(x) = \cos(x^2 + 3)$

7. $f(x) = \tan(e^x)$

8. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Bloque 5: problemas de optimización

1. Un agricultor dispone de 120 metros de valla metálica para cercar un terreno rectangular adyacente a un muro de piedra, de modo que el muro sirva como uno de los lados del recinto. Halla las dimensiones del rectángulo para que el área encerrada sea máxima.

2. Se desea fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) que tenga un volumen exacto de 500 cm^3 . Determina las dimensiones que minimizan la cantidad de metal necesaria para su fabricación.



Resolución del examen

Resolución Bloque 1: Límites

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminación

1. Grados iguales en numerador y denominador. Dividimos coeficientes principales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 7x - 1} = \frac{3}{2}.$$

2. Grado efectivo del numerador es 1 ($\sqrt{x^2} = x$) e igual al del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x} - 1}{3x + 5} = \frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. El grado del denominador es mayor que el del numerador: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 4}{5x^3 + 2} = 0.$

4. El grado del numerador es mayor que el del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x}{x^2 + 3x + 1} = +\infty.$$

$$\frac{0}{0}$$

Indeterminación

1. Factorizamos por Ruffini/identidades notables:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4.$$

2. Sacamos factor común x : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-2)}{x(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x+5} = \frac{0}{5} = 0.$

3. Multiplicamos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$



4. Multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x+1) - 4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24$$

.

Indeterminación $\infty - \infty$

1. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x} - x)(\sqrt{x^2 + 5x} + x)}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x + x} = \frac{5}{2}$$

.

2. Efectuamos la resta de fracciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)(x+1) - (x^2 - 1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 - x^2 - x + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 2$$

.

3. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 3) - (x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x - 3}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{-2}{1 + 1} = -1$$

4. Efectuamos la operación encontrando el mínimo común múltiplo $x^2 - 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Indeterminación 1^∞

1. Aplicamos la fórmula $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (f(x) - 1)}$:

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \cdot (\frac{x+3}{x+1} - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \cdot (\frac{2}{x+1})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x+1}} = e^4$$

$$2. e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot (\frac{2x^2+5}{2x^2-1} - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot (\frac{6}{2x^2-1})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{2x^2-1}} = e^{6/2} = e^3$$

$$3. e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \cdot (1+3x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \cdot 3x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} 6} = e^6$$

$$4. e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5) \cdot (\frac{3x-1}{3x+2} - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5) \cdot (\frac{-3}{3x+2})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x+15}{3x+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Resolución Bloque 2: Continuidad y Derivabilidad

1. Continuidad en $x = 1$:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a(1)^2 + b(1) + 1 = a + b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln(1) + 2 = 0 + 2 = 2$$

Para que sea continua: $a + b + 1 = 2 \implies a + b = 1$ (Ecuación 1)

2. Derivabilidad en $x = 1$:

Calculamos la derivada de los trozos laterales para $x \neq 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Derivadas laterales en $x = 1$:

$$f'(1^-) = 2a(1) + b = 2a + b$$

$$f'(1^+) = \frac{1}{1} = 1$$

Para que sea derivable: $2a + b = 1$ (Ecuación 2)

3. Sistema de ecuaciones:

Restando la Ecuación 1 a la Ecuación 2: $(2a + b) - (a + b) = 1 - 1 \implies a = 0$.

Sustituyendo $a = 0$ en la Ecuación 1: $0 + b = 1 \implies b = 1$.

Solución: El valor de los parámetros debe ser $a = 0$ y $b = 1$.

Resolución Bloque 3: Estudio Completo de una

Función

Función: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

- Dominio: El denominador se anula en $x = 1$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Recorrido: Evaluando la ecuación $y = \frac{x^2}{x-1} \implies x^2 - yx + y = 0$. Para



tener soluciones reales, el discriminante

$$\Delta = y^2 - 4y \geq 0 \implies y \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty).$$

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty).$$

- Asíntotas Verticales: En $x = 1$. Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

- Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$. No tiene.

- Asíntotas Oblicuas ($y = mx + n$):

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Asíntota oblicua en $y = x + 1$.

- Monotonía y Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Puntos críticos: $f'(x) = 0 \implies x = 0, x = 2$.

- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ donde $f'(x) > 0$.

- Decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$ donde $f'(x) < 0$.

- Máximo relativo en $(0, 0)$.

- Mínimo relativo en $(2, 4)$.

- Curvatura y Puntos de Inflexión:



$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Como el numerador nunca es cero, no existen puntos de inflexión.

- Convexa ($\cup$) si $x > 1$ pues $f''(x) > 0$.

- Cóncava ($\cap$) si $x < 1$ pues $f''(x) < 0$.

Resolución Bloque 4: Derivadas

$$1. f'(x) = 4(3x^2 - 5x + 2)^3 \cdot (6x - 5)$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 2x}} \cdot (3x^2 - 2) = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x}}$$

$$3. f'(x) = e^{5x^2 - x} \cdot (10x - 1)$$

$$4. f'(x) = \frac{1}{4x^3 + 2x} \cdot (12x^2 + 2) = \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x}$$

$$5. f'(x) = 3 \sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6 \sin^2(2x) \cos(2x)$$

$$6. f'(x) = -\sin(x^2 + 3) \cdot 2x = -2x \sin(x^2 + 3)$$

$$7. f'(x) = \frac{1}{\cos^2(e^x)} \cdot e^x = e^x \sec^2(e^x)$$

8. Simplificamos usando propiedades de logaritmos antes de derivar:

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2 - 1}$$

Resolución Bloque 5: Optimización

1. Dimensiones del terreno rectangular:

Sea x el lado perpendicular al muro e y el lado paralelo al muro. La longitud de la

valla es $2x + y = 120 \implies y = 120 - 2x$.



La función a maximizar es el área: $A(x) = x \cdot y = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$.

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = 120 - 4x = 0 \implies 4x = 120 \implies x = 30 \text{ m.}$$

Comprobamos con la segunda derivada: $A''(x) = -4 < 0$ (es un máximo).

Calculamos el otro lado: $y = 120 - 2(30) = 60 \text{ m.}$

Solución: Las dimensiones del rectángulo deben ser 30 metros para los dos lados perpendiculares al muro y 60 metros para el lado paralelo al mismo.

2. Dimensiones óptimas del cilindro:

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h = 500 \implies h = \frac{500}{\pi r^2}$.

Queremos minimizar la superficie total:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{500}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}.$$

Derivamos la función del área con respecto al radio: $A'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$.

Igualamos a cero para buscar el punto crítico:

$$4\pi r = \frac{1000}{r^2} \implies r^3 = \frac{1000}{4\pi} = \frac{250}{\pi} \implies r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.30 \text{ cm.}$$

Calculamos la altura correspondiente:

$$h = \frac{500}{\pi r^2} = \frac{500}{\pi \cdot \left(\frac{250}{\pi}\right)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = 2r \approx 8.60 \text{ cm.}$$

La segunda derivada $A''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3} > 0$, garantizando que es un mínimo absoluto.

Solución: El radio de la base debe medir aproximadamente 4.30 cm y la altura debe ser exactamente el doble del radio, aproximadamente 8.60 cm.