



Examen matemáticas 1 bachillerato - Operaciones con reales, ecuaciones e inecuaciones.

1. Operaciones con números reales

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{27^3 \cdot 9^{-2}}{3^4 \cdot 81^{-1}}$$

$$\frac{\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\log_3(x) = 2\log_3(6) - \frac{1}{2}\log_3(16) + \log_3(2)$$

2. Factorización de polinomios

Factoriza al máximo el siguiente polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 16x + 24$$

3. Operaciones con polinomios

$$\left(\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right) \div \frac{3}{x+2}$$

4. Resolución de ecuaciones y sistemas

$$\sqrt{2x+5} + 1 = x$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 9 \end{cases}$$



5. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 5 - x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x - y > 1 \end{cases}$$



Solucionario y Explicación Detallada

1. Operaciones con Números Reales y Logaritmos

a) Fracciones

1. Jerarquía: Resolvemos primero la multiplicación del primer paréntesis:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

2. Restamos dentro del primer paréntesis hallando el m.c.m.(3, 8) = 24:

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{8} = \frac{40 - 9}{24} = \frac{31}{24}$$

3. Sumamos dentro del segundo paréntesis hallando el m.c.m.(3, 6) = 6:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4 + 1}{6} = \frac{5}{6}$$

4. Dividimos ambas fracciones multiplicando en cruz y simplificando:

$$\frac{31}{24} \div \frac{5}{6} = \frac{31 \cdot 6}{24 \cdot 5} = \frac{31 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{31}{20}$$

b) Potencias

1. Descomponemos las bases en factores primos:

$$27 = 3^3, 9 = 3^2, 81 = 3^4.$$

2. Sustituimos y aplicamos la propiedad de potencia de una potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\frac{(3^3)^3 \cdot (3^2)^{-2}}{3^4 \cdot (3^4)^{-1}} = \frac{3^9 \cdot 3^{-4}}{3^4 \cdot 3^{-4}}$$

3. Sumamos exponentes en numerador y denominador:

$$\frac{3^{9+(-4)}}{3^{4+(-4)}} = \frac{3^5}{3^0} = \frac{3^5}{1} = 3^5$$

c) Raíces

1. Introducimos el factor x dentro de la raíz cúbica del numerador:

$$x \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^5}$$

2. Juntamos la raíz del numerador:

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^5}} = \sqrt[6]{x^5}$$

3. Pasamos a exponente fraccionario o buscamos un índice común (m.c.m.(6, 4) = 12):

$$\frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[12]{(x^5)^2}}{\sqrt[12]{(x^3)^3}} = \frac{\sqrt[12]{x^{10}}}{\sqrt[12]{x^9}} = \sqrt[12]{\frac{x^{10}}{x^9}} = \sqrt[12]{x}$$

d) Logaritmos

1. Subimos los coeficientes como exponentes:

$$n \cdot \log(a) = \log(a^n):$$



$$2 \log_3(6) = \log_3(6^2) = \log_3(36)$$

$$\frac{1}{2} \log_3(16) = \log_3(16^{1/2}) = \log_3(\sqrt{16}) = \log_3(4)$$

2. Agrupamos restas como división y sumas como producto:

$$\log_3(x) = \log_3(36) - \log_3(4) + \log_3(2) = \log_3\left(\frac{36 \cdot 2}{4}\right) = \log_3(18)$$

3. Igualamos argumentos:

$$x = 18.$$

2. Factorización de Polinomios

Dado $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 16x + 24$:

1. Sacamos factor común el coeficiente principal (opcional, facilita los cálculos):

$$P(x) = 2(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12)$$

2. Buscamos las raíces enteras entre los divisores de 12 ($\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$), probamos Ruffini con -1 y luego con 2

3. Resultado:

- Polinomio factorizado:

$$P(x) = 2(x+1)(x-2)(x-3)(x+2)$$

- Raíces reales:

$$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3$$

3. Operaciones con polinomios y fracciones algebraicas

1. Factorizamos denominadores:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

2. Operamos dentro del paréntesis con m.c.m.

$$(x-2)(x+2):$$

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{1 \cdot (x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1-x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{(x-2)(x+2)}$$

3. Dividimos multiplicando por la fracción inversa:

$$\frac{-1}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{3} = \frac{-1 \cdot (x+2)}{3(x-2)(x+2)}$$

4. Simplificamos el factor común

$$(x+2)$$

5. Resultado:

$$\frac{-1}{3(x-2)} = \frac{-1}{3x-6}$$

4. Resolución de Ecuaciones y Sistemas

a) Ecuación Irracional

$$\sqrt{2x+5} + 1 = x \implies \sqrt{2x+5} = x-1$$



1. Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{2x+5})^2 = (x-1)^2 \implies 2x+5 = x^2 - 2x + 1$$

2. Reorganizamos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

3. Aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

4. Comprobación obligatoria de raíces:

- Para

$$x = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83:$$

$$\sqrt{2(4,83) + 5 + 1} = \sqrt{14,66} + 1 \approx 3,83 + 1 = 4,83$$

(Válida).

- Para

$$x = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0,83:$$

$$\sqrt{2(-0,83) + 5 + 1} = \sqrt{3,34} + 1 \approx 2,83 \neq -0,83$$

(No válida).

- Solución única:

$$x = 2 + 2\sqrt{2}$$

b) Sistema No Lineal

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

1. Notamos que

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Sustituimos $x + y = 9$ en la primera ecuación:

$$(x - y) \cdot 9 = 9 \implies x - y = 1$$

2. Resolvemos el sistema equivalente de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

3. Sumando ambas ecuaciones:

$$2x = 10 \implies x = 5.$$

4. Sustituyendo en la segunda:

$$5 + y = 9 \implies y = 4.$$

- Solución única:

$$(x, y) = (5, 4)$$

5. Inecuaciones y Sistemas de Inecuaciones

a) Inecuación de segundo grado

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$



1. Encontramos los puntos críticos igualando a cero:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \implies (x - 5)(x + 1) = 0 \implies x = -1, x = 5$$

2. Evaluamos el signo en los 3 intervalos creados:

- $(-\infty, -1)$:

$$\text{Si } x = -2 \implies (-2)^2 - 4(-2) - 5 = 5 > 0 \text{ (Falso).}$$

- $(-1, 5)$:

$$\text{Si } x = 0 \implies 0^2 - 4(0) - 5 = -5 \leq 0 \text{ (Verdadero).}$$

- $(5, +\infty)$:

$$\text{Si } x = 6 \implies 6^2 - 4(6) - 5 = 7 > 0 \text{ (Falso).}$$

- Solución:

$$x \in [-1, 5]$$

b) Sistema de inecuaciones con una variable

1. Resolvemos la primera inecuación:

$$2x - 4 > 0 \implies 2x > 4 \implies x > 2 \implies x \in (2, +\infty)$$

2. Resolvemos la segunda inecuación:

$$5 - x \geq 1 \implies 5 - 1 \geq x \implies 4 \geq x \implies x \in (-\infty, 4]$$

3. La solución del sistema es la intersección de ambos conjuntos:

$$(2, +\infty) \cap (-\infty, 4].$$

- Solución:

$$x \in (2, 4]$$

c) Sistema de inecuaciones con dos variables

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x - y > 1 \end{cases}$$

1. Primera inecuación ($2x + y \leq 6$):

- Dibujamos la recta frontera

$$2x + y = 6 \text{ (línea **continua** porque incluye el } \leq \text{). Pasa por } (0, 6) \text{ y } (3, 0).$$

- Probamos el punto origen

$$(0, 0) : 2(0) + 0 = 0 \leq 6$$

(Verdadero). La región solución es el semiplano que contiene al origen $(0, 0)$.

2. Segunda inecuación ($x - y > 1$):



- Dibujamos la recta frontera
 $x - y = 1$
(línea **discontinua** porque es una desigualdad estricta $>$). Pasa por $(1, 0)$ y $(0, -1)$.
- Probamos el punto origen
 $(0, 0)$:
 $0 - 0 = 0 > 1$
(Falso). La región solución es el semiplano inferior/derecho que **no** contiene al origen $(0, 0)$.
- **Solución:** La región factible es el ángulo no acotado comprendido entre la intersección de ambos semiplanos del plano cartesiano.