



Examen matemáticas 1 bachillerato - Operaciones con reales, ecuaciones e inecuaciones.

1. Operaciones con Números Reales y Logaritmos (Ejercicios independientes)

- **a) Fracciones:** Calcula y simplifica al máximo la siguiente expresión combinada:

$$\left(\frac{7}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} \right) \div \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3} \right)$$

- **b) Potencias:** Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{125^2 \cdot 5^{-3}}{25^3 \cdot 625^{-1}}$$

- **c) Raíces:** Aplica las propiedades de los radicales para simplificar al máximo:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt[6]{x^5}}$$

- **d) Logaritmos:** Halla el valor exacto de x aplicando las propiedades de los logaritmos sin usar calculadora:

$$\log_2(x) = 3 \log_2(4) - \frac{1}{3} \log_2(27) - \log_2(3)$$

2. Factorización de Polinomios

Factoriza el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$$

3. Operaciones con Polinomios y Fracciones Algebraicas

Opera y simplifica:

$$\left(\frac{2x-1}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} \right) \div \frac{3}{x-3}$$

4. Resolución de Ecuaciones y Sistemas

- **a) Ecuación con una variable::**

$$\sqrt{3x+1} - 1 = x$$

- **b) Sistema de ecuaciones con dos variables::**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

5. Inecuaciones y Sistemas de Inecuaciones

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

$$\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ 8 - 2x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ 2x - y > 2 \end{cases}$$



Solucionario y Explicación Detallada

1. Operaciones con Números Reales y Logaritmos

a) Fracciones

Multiplicación en el primer paréntesis:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Resta del primer paréntesis:

$$\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Resta del segundo paréntesis (m.c.m. = 6):

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

División final:

$$1 \div \frac{1}{2} = 2$$

Resultado:

2

b) Potencias

Descomposición en base 5:

$$125 = 5^3, 25 = 5^2, 625 = 5^4.$$

Sustitución y aplicación de potencias:

$$\frac{(5^3)^2 \cdot 5^{-3}}{(5^2)^3 \cdot (5^4)^{-1}} = \frac{5^6 \cdot 5^{-3}}{5^6 \cdot 5^{-4}}$$

Suma de exponentes en el numerador y denominador:

$$\frac{5^{6+(-3)}}{5^{6+(-4)}} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1$$

Resultado:

5

c) Raíces

Introducimos x^2 dentro de la raíz cuadrada interna del numerador:

$$\sqrt[3]{\sqrt{(x^2)^2 \cdot x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^4 \cdot x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[6]{x^5}$$

Dividimos con el denominador:

$$\frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[6]{x^5}} = 1$$

Resultado:

1

d) Logaritmos

Subimos los coeficientes como exponentes:

$$3 \log_2(4) = \log_2(4^3) = \log_2(64)$$



$$\frac{1}{3} \log_2(27) = \log_2(27^{1/3}) = \log_2(\sqrt[3]{27}) = \log_2(3)$$

Agrupamos mediante las propiedades:

$$\log_2(x) = \log_2(64) - \log_2(3) - \log_2(3) = \log_2\left(\frac{64}{3 \cdot 3}\right) = \log_2\left(\frac{64}{9}\right)$$

Resultado:

$$x = \frac{64}{9}$$

2. Factorización de Polinomios

Resultado:

Polinomio factorizado:

$$P(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - 3)$$

Raíces reales:

$$x_1 = 1 \text{ (doble)}, x_2 = -2, x_3 = 3$$

3. Operaciones con Polinomios y Fracciones Algebraicas

Factorizamos denominadores:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3). \text{ Operamos dentro del paréntesis (m.c.m. = } (x - 3)(x + 3) \text{):}$$

$$\frac{2x - 1}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{1 \cdot (x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{2x - 1 + x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{3x - 4}{(x - 3)(x + 3)}$$

Dividimos invirtiendo el segundo término:

$$\frac{3x - 4}{(x - 3)(x + 3)} \cdot \frac{x - 3}{3} = \frac{(3x - 4)(x - 3)}{3(x - 3)(x + 3)}$$

Simplificamos el factor

$$(x - 3):$$

Resultado:

$$\frac{3x - 4}{3(x + 3)} = \frac{3x - 4}{3x + 9}$$

4. Resolución de Ecuaciones y Sistemas

a) Ecuación Irracional

$$\sqrt{3x + 1} - 1 = x \implies \sqrt{3x + 1} = x + 1$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(\sqrt{3x + 1})^2 = (x + 1)^2 \implies 3x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

Reorganizamos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x = 0 \implies x(x - 1) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 1$$

Comprobación obligatoria:

Para

$$x = 0:$$

$$\sqrt{3(0) + 1} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ (Válida).}$$

Para



$$x = 1: \sqrt{3(1) + 1} - 1 = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ (Válida).}$$

Soluciones:

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

b) Sistema No Lineal

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Despejamos x en la segunda ecuación: $x = y + 1$.

Sustituimos en la primera:

$$(y + 1)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 + y^2 = 25 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 24 = 0$$

Simplificamos dividiendo entre 2:

$$y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow (y + 4)(y - 3) = 0 \Rightarrow y_1 = -4, y_2 = 3$$

Calculamos sus correspondientes valores de x :

$$\text{Si } y = -4 \Rightarrow x = -4 + 1 = -3.$$

$$\text{Si } y = 3 \Rightarrow x = 3 + 1 = 4.$$

Soluciones:

$$(x_1, y_1) = (-3, -4) \text{ y } (x_2, y_2) = (4, 3)$$

5. Inecuaciones y Sistemas de Inecuaciones

a) Inecuación de Segundo Grado

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

Puntos críticos:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 4.$$

Evaluamos los signos por intervalos:

$$(-\infty, -2]: \text{Si } x = -3 \Rightarrow (-3)^2 - 2(-3) - 8 = 7 \geq 0 \text{ (Verdadero).}$$

$$[-2, 4]: \text{Si } x = 0 \Rightarrow 0^2 - 2(0) - 8 = -8 \geq 0 \text{ (Falso).}$$

$$[4, +\infty): \text{Si } x = 5 \Rightarrow 5^2 - 2(5) - 8 = 7 \geq 0 \text{ (Verdadero).}$$

Solución:

$$x \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$$

b) Sistema de Inecuaciones con una Variable

Primera inecuación:

$$3x - 6 > 0 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow (2, +\infty).$$

$$\text{Segunda inecuación: } 8 - 2x \geq 2 \Rightarrow 6 \geq 2x \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow (-\infty, 3].$$

$$\text{Intersección de ambos conjuntos: } (2, +\infty) \cap (-\infty, 3].$$

Solución:

$$x \in (2, 3]$$

c) Sistema de Inecuaciones con dos Variables

$$\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ 2x - y > 2 \end{cases}$$

Primera inecuación ($x + 2y \leq 4$):

Recta frontera continua $x + 2y = 4$ (pasa por $(0, 2)$ y $(4, 0)$).



El origen $(0, 0)$ cumple $0 + 0 \leq 4$ (Verdadero), por lo que el semiplano incluye al origen.

Segunda inecuación ($2x - y > 2$):

Recta frontera discontinua $2x - y = 2$ (pasa por $(1, 0)$ y $(0, -2)$).

El origen $(0, 0)$ da $0 - 0 > 2$ (Falso), por lo que la solución es el semiplano que **no** contiene al origen.

Solución: La región del plano intersección de ambos semiplanos.