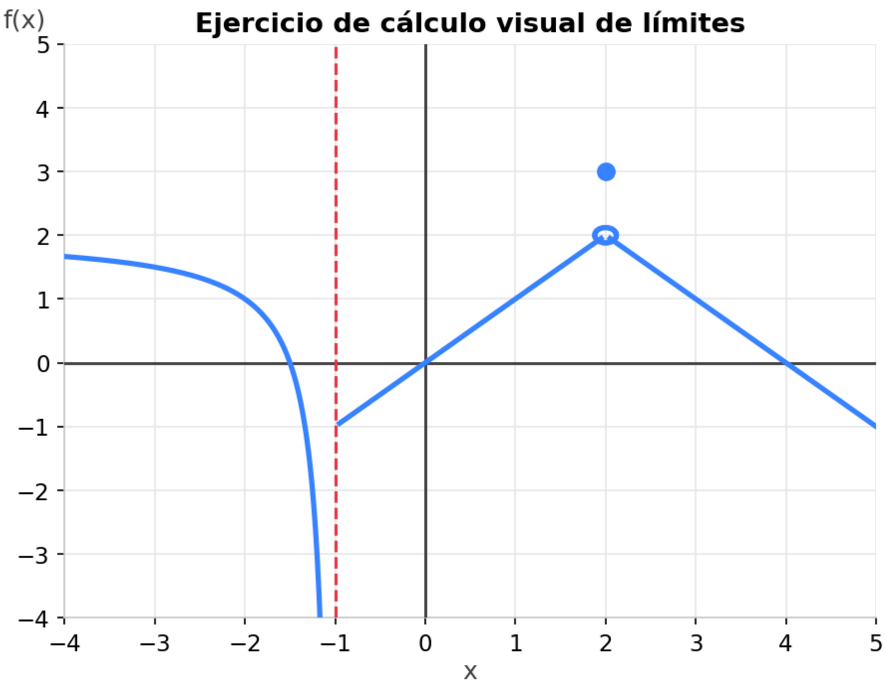
# Examen de Límites y Continuidad

## Parte 1: Ejercicios

### Ejercicio 1: Límites sobre Gráfica (2.5 puntos)

Dada la siguiente gráfica de la función $f(x)$:




Calcula visualmente los siguientes límites e indica el valor general de la función en esos puntos: a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to -1^+} f(x)$. ¿Existe límite en $x = -1$? b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. ¿Existe límite en $x = 2$? ¿Cuánto vale de forma exacta $f(2)$? c) Identifica y clasifica los tipos de discontinuidad que presenta la función en $x = -1$ y $x = 2$.

### Ejercicio 2: Cálculo Analítico de Límites (3 puntos)

Resuelve justificando cada paso, simplifica y declara la indeterminación en caso de que ocurra: a) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 5x^2}$ b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ c) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - x)$

## Ejercicio 3: Cálculo de Asíntotas (2 puntos)

Determina detalladamente todas las asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas) de la siguiente función racional: $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$

## Ejercicio 4: Continuidad de una Función a Trozos (2.5 puntos)

Estudia la continuidad de la siguiente función en el punto conflictivo $x = 1$. En caso de discontinuidad, clasifica su tipo. $f(x)=\{x^2-x \text{ si } x<1 \ 3 \text{ si } x=1 \ 2x-2 \text{ si } x>1$

# Parte 2: Solucionario

## Solución Ejercicio 1

a) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ (debido a la rama de la asíntota divergente). $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$ (se acerca al inicio de la línea recta). Como los límites laterales divergen ampliamente y no coinciden, **no existe límite global** en $x = -1$. b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$. Como coinciden, **el límite existe** y vale 2. Sin embargo, observando el punto relleno desplazado, comprobamos que $f(2) = 3$. c) En $x = -1$ hay una **discontinuidad de salto infinito** dadas las características de asíntota vertical descritas anterior. En $x = 2$ se presenta una **discontinuidad evitable** (el límite existe, que es 2, pero distinto de $f(2)$, que es 3).

## Solución Ejercicio 2

a) Al sustituir infinitos, obtenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Al tener polinomios del mismo grado en el cociente (grado 3), basta con dividir sus coeficientes principales: $\frac{4}{2} = 2$. Por tanto, el límite es $2$. b) Al sustituir por el valor $3$, obtenemos la indeterminación clara de $\frac{0}{0}$. Para ello factorizamos el numerador utilizando identidades notables: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. El límite se transforma mediante simplificaciones en $\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$. c) En primera instancia hay una indeterminación $\infty - \infty$. Debemos entonces multiplicar y dividir todo por la conjugada de las raíces que es $(\sqrt{x^2 - 5x} + x)$. Numerador: $(\sqrt{x^2 - 5x} - x)(\sqrt{x^2 - 5x} + x) = (x^2 - 5x) - x^2 = -5x$. Nos situamos en $\lim_{x \to \infty} \frac{-5x}{\sqrt{x^2 - 5x} + x}$. Vemos ahora una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Grado es lineal (1) arriba y abajo (raíz de grado 2 es grado 1). Sumando coeficientes de índice $1$ en la base obtenemos $1 + 1 = 2$. Resultado al dividir ambos factores mayoritarios y coeficientes: $\frac{-5}{2} = -2.5$.

## Solución Ejercicio 3

**Asíntota Vertical (AV):** Buscamos anular el denominador de la función original: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. El numerador evaluado en dicho punto 2 vale $2^2 + 2 = 6 \neq 0$. Como no se esconde un límite simplificable, establecemos que existe una de ellas en la recta $x = 2$. **Asíntota Horizontal (AH):** Calculamos el límite en el dominio infinito: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x - 2} = \infty$. Como el numerador es superior estructuralmente a su base, **no hay**

**asíntota horizontal**. **Asíntota Oblicua (AO):** Al tener una falta en la vertical de grado uno mayor al del denominador, existe oblicua de forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} = 1$$.

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{x^2 + x}{x - 2} - \frac{x(x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-2} = 3$$

. La asíntota es la recta $y = x + 3$.

## Solución Ejercicio 4

Analizamos sistemáticamente las 3 condiciones de continuidad en el salto dado en $x = 1$:

1. El centro está cerrado: $f(1) = 3$.
2. Verificamos límites de aproximación laterales:

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 - 1 = 0$.
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2(1) - 2 = 0$. Como los dos laterales coinciden perfectamente entre sí, existe el límite como entidad global: $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

3. El valor verificado del límite en el punto ($\lim = 0$) difiere por salto natural del de la propia función estipulada ($f(1) = 3$). Por tanto queda claro, la función muestra sin duda una **discontinuidad evitable** a la altura de su tramo original en $x = 1$.