Repaso de límites y continuidad

Ejercicio 1 - Cálculo de límites

Calcula los siguientes límites, indicando el tipo de indeterminación si aparece:

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 4x^2 - 7}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^4 + 2x}}{2x^2 - 5x + 1}$

e) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{4}{x^2 - 4} \right)$

f) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x \right)$

g) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x - 1} \right)^{3x}$

h) $\lim_{x \to 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{2x}}$

i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{x - 1}$

j) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 1}{(x + 2)^2}$

Ejercicio 2 - Asíntotas

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$:

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

Ejercicio 3 - Continuidad de una función a trozos

Estudia la continuidad de la siguiente función y clasifica todos sus puntos de discontinuidad:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{6}{x - 4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4 - Parámetro para la continuidad

Halla el valor de a para que la función $h(x)$ sea continua en todos sus puntos:

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$. Factorizamos el numerador por Ruffini y el denominador como diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{3}{4}$$

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$$

c) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ con el mismo grado arriba y abajo: dividimos los coeficientes principales.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-2x+1}{2x^3+4x^2-7}=\frac{5}{2}$$

d) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. El numerador se comporta como $\sqrt{9x^4}=3x^2$, de grado 2 como el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^4+2x}}{2x^2-5x+1}=\frac{3}{2}$$

e) Indeterminación $\infty-\infty$. Restamos las fracciones con denominador común $x^2-4=(x-2)(x+2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

f) Indeterminación $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\frac{4}{1+1}=2$$

g) Indeterminación 1^∞. Usamos $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\cdot(f(x)-1)}$:

$$\lim_{x\to+\infty}3x\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}3x\cdot\frac{4}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x}{2x-1}=6$$

El límite es e^6.

h) Indeterminación 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot(1+4x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2$$

El límite es e^2.

i) Al sustituir obtenemos $\frac{5}{0}$: el límite es infinito y hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

Los límites laterales son distintos, así que el límite no existe.

j) Al sustituir obtenemos $\frac{5}{0}$. El denominador es un cuadrado, así que es positivo por los dos lados:

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+1}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+1}{(x+2)^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

El límite es $+\infty$.

Solución Ejercicio 2

a) El denominador se anula en $x=1$: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Asíntota vertical en $x=1$, porque el numerador vale $1-3=-2\neq 0$:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x}{x-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x}{x-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Asíntota horizontal: no hay, porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ (el grado del numerador es mayor).

Asíntota oblicua $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x-1}=-2$$

La asíntota oblicua es $y=x-2$.

Solución Ejercicio 3

Estudiamos los puntos donde se anula algún denominador y los puntos donde cambia la definición.

$x=-2$ (primer tramo): el denominador $x+2$ se anula y el numerador no. Discontinuidad inevitable de salto infinito (asíntota vertical).

$x=0$ (cambio de tramo): $g(0)=\dfrac{0-1}{0-1}=1$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x-1}=1$$

Los límites laterales son distintos: discontinuidad inevitable de salto finito.

$x=1$ (segundo tramo): el denominador $x-1$ se anula, así que $g(1)$ no existe. Sin embargo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

El límite existe pero la función no está definida: discontinuidad evitable.

$x = 2$ (cambio de tramo): $g(2) = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 3 \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{6}{x-4} = -3$$

Discontinuidad inevitable de salto finito (salto de 6 unidades).

$x = 4$ (tercer tramo): el denominador se anula y el numerador no. Discontinuidad inevitable de salto infinito.

Conclusión: g es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 2, 4\}$.

Solución Ejercicio 4

Cada tramo es continuo en su intervalo (el segundo solo se anula su denominador en $x = 1$, que no pertenece a su tramo). Solo hay que imponer la continuidad en $x = 1$:

$h(1) = 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 - 3 = a - 1$, que coincide con el límite por la izquierda.

Por la derecha, indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x+4) = 5$$

Igualamos: $a - 1 = 5 \implies a = 6$.