Ejercicios de polinomios

Ejercicio 1 - Raíces y factorización

Calcula las raíces de los siguientes polinomios y descomponlos en factores:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $Q(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$

c) $R(x) = 3x^5 - 3x^4 - 12x^3 + 12x^2$

d) $S(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

Ejercicio 2 - Fracciones algebraicas

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 4x + 4}$

b) $\dfrac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 1}$

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Probamos $x = 1$ por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

El cociente es $x^2 - x - 6$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \implies x = 3,\ x = -2$$

Raíces: $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$.

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

b) Sacamos factor común x:

$$Q(x) = x(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

Probamos $x = 1$ en el polinomio de tercer grado:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

El cociente es $x^2 + 3x + 2$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \implies x = -1,\ x = -2$$

Raíces: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$.

$$Q(x) = x(x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

c) Sacamos factor común $3x^2$:

$$R(x) = 3x^2(x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

Probamos $x = 1$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

El cociente es $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ (diferencia de cuadrados).

Raíces: $x = 0$ (doble), $x = 1$, $x = 2$, $x = -2$.

$$R(x) = 3x^2(x - 1)(x - 2)(x + 2)$$

El factor 3 no da ninguna raíz, pero forma parte de la factorización.

d) El coeficiente principal es 2, así que además de raíces enteras puede haber raíces fraccionarias. Probamos $x = 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & & 4 & 2 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Probamos $x = -1$ en el cociente $2x^2 + x - 1$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -1 \\ -1 & & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

El último cociente es $2x - 1$, que se anula en $x = \dfrac{1}{2}$.

Raíces: $x = 2$, $x = -1$, $x = \dfrac{1}{2}$.

Al factorizar hay que escribir el coeficiente principal delante:

$$S(x) = 2(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(x+1)(2x-1)$$

Error típico: escribir $S(x) = (x-2)(x+1)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$ olvidando el 2; ese producto da $x^3 - \ldots$ y no $2x^3 - \ldots$

Solución Ejercicio 2

a) Factorizamos numerador y denominador:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) \qquad x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x(x+2)}{x-2}$$

b) El numerador es el polinomio $S(x)$ del ejercicio 1 d), y el denominador es una diferencia de cuadrados:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x+1)(2x-1) \qquad 4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$$

$$\frac{(x-2)(x+1)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2x+1}$$