Ejercicios de potencias, raíces y logaritmos

Ejercicio 1 - Potencias

Simplifica al máximo, expresando el resultado con exponentes positivos:

a) $\dfrac{(2^3)^{-2}\cdot 4^5\cdot 8^{-1}}{16^{-2}\cdot 2^7}$

b) $\dfrac{a^3b^{-2}\cdot (a^{-1}b)^4}{(a^2b^{-3})^{-1}}$

Ejercicio 2 - Radicales

a) Extrae factores y simplifica: $\sqrt{50}-3\sqrt{8}+\sqrt{18}$

b) Expresa como un único radical y simplifica: $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}$

c) Racionaliza: $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

d) Racionaliza: $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

Ejercicio 3 - Logaritmos

Calcula aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 32+\log_3 \dfrac{1}{9}$

b) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

c) $\log 0{,}001+\ln e^4$

d) $\log_{1/2} 8$

Ejercicio 4 - Propiedades de los logaritmos

Sabiendo que $\log 2=0{,}301$ y $\log 3=0{,}477$, calcula sin calculadora:

a) $\log 72$

b) $\log \dfrac{\sqrt{18}}{5}$

Ejercicio 5 - Operaciones combinadas

Calcula y simplifica al máximo:

a) $\dfrac{\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{18}}{\sqrt[6]{24}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

c) $\log_2 \dfrac{\sqrt[3]{16} \cdot 8^{-1}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\log_3 \sqrt{27} + \log_2 \sqrt[4]{8}}{\ln \sqrt{e} - \log 0{,}01}$

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Escribimos todo en base 2: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$.

$$\frac{2^{-6} \cdot 2^{10} \cdot 2^{-3}}{2^{-8} \cdot 2^{7}} = \frac{2^{-6+10-3}}{2^{-8+7}} = \frac{2^{1}}{2^{-1}} = 2^{1-(-1)} = 2^2 = 4$$

b) Desarrollamos las potencias de los paréntesis:

$$(a^{-1}b)^4 = a^{-4}b^4 \qquad (a^2b^{-3})^{-1} = a^{-2}b^3$$

$$\frac{a^3b^{-2} \cdot a^{-4}b^4}{a^{-2}b^3} = \frac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b^3} = a^{-1-(-2)}\, b^{2-3} = a\, b^{-1} = \frac{a}{b}$$

Solución Ejercicio 2

a) Descomponemos cada radicando:

$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2} \qquad 3\sqrt{8} = 3\sqrt{2^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2} \qquad \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

b) Reducimos a índice común, $\mathrm{mcm}(3, 2) = 6$:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{2^4} \qquad \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$$

$$\sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$$

c) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

d) Multiplicamos por el conjugado del denominador, $3 + \sqrt{5}$:

$$\frac{4}{3 - \sqrt{5}} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{4} = 3 + \sqrt{5}$$

Solución Ejercicio 3

a) $2^5 = 32$ y $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$:

$$\log_2 32 + \log_3 \frac{1}{9} = 5 + (-2) = 3$$

b) $\sqrt[3]{25} = 5^{2/3}$:

$$\log_5 5^{2/3} = \frac{2}{3}$$

c) $0{,}001 = 10^{-3}$:

$$\log 10^{-3} + \ln e^{4} = -3 + 4 = 1$$

d) Buscamos x tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 8$:

$$2^{-x} = 2^{3} \implies x = -3$$

Solución Ejercicio 4

a) $72 = 2^{3} \cdot 3^{2}$:

$$\log 72 = 3\log 2 + 2\log 3 = 3 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}903 + 0{,}954 = 1{,}857$$

b) $18 = 2 \cdot 3^{2}$ y $5 = \frac{10}{2}$, así que $\log 5 = 1 - \log 2 = 0{,}699$:

$$\log \frac{\sqrt{18}}{5} = \frac{1}{2}\log 18 - \log 5 = \frac{1}{2}(\log 2 + 2\log 3) - (1 - \log 2)$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}301 + 0{,}954) - 0{,}699 = 0{,}6275 - 0{,}699 = -0{,}0715$$

Solución Ejercicio 5

a) Factorizamos los radicandos: $12 = 2^{2} \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^{2}$, $24 = 2^{3} \cdot 3$. Pasamos a potencias de exponente fraccionario:

$$\frac{2 \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1/3} \cdot 3^{2/3}}{2^{1/2} \cdot 3^{1/6}} = 2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 2^{5/6} \cdot 3^{1}$$

$$= 3\sqrt[6]{2^{5}} = 3\sqrt[6]{32}$$

b) Común denominador, $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2 - 1 = 1$:

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{1} = (2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

c) Escribimos todo como potencia de 2: $\sqrt[3]{16} = 2^{4/3}$, $8^{-1} = 2^{-3}$, $\sqrt{2} = 2^{1/2}$.

$$\log_2 \frac{2^{4/3} \cdot 2^{-3}}{2^{1/2}} = \log_2 2^{\frac{4}{3}-3-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} - 3 - \frac{1}{2} = \frac{8 - 18 - 3}{6} = -\frac{13}{6}$$

d) Calculamos cada logaritmo por separado:

$$\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{3/2} = \frac{3}{2} \qquad \log_2 \sqrt[4]{8} = \log_2 2^{3/4} = \frac{3}{4}$$

$$\ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \qquad \log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$$

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - (-2)} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{9 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$