Ejercicio 1: Operaciones con Sucesos

En un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades para los sucesos A y B:

$P(\overline{A}) = 0,6$

$P(B) = 0,5$

$P(A \cap B) = 0,2$

Calcula:

- a) $P(A)$
- b) $P(\overline{B})$
- c) $P(A \cup B)$
- d) $P(A \cap \overline{B})$
- e) $P(A/B)$
- f) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta numéricamente.

Ejercicio 2: Tabla de Contingencia

Se ha realizado un estudio sobre los hábitos de lectura y el nivel de estudios en un grupo de 150 personas. Los resultados parciales se muestran en la siguiente tabla. Completa la tabla y responde:

Nivel de Estudios \ Hábito de Lectura	**Lee regularmente (L)**	**No lee (NL)**	**TOTAL**
Estudios Universitarios (U)			**60**
Sin Estudios Universitarios (S)		**55**	
TOTAL	**70**		**150**

Al elegir una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) Tenga estudios universitarios y no lea regularmente.
- b) No tenga estudios universitarios o lea regularmente.

- c) Lea regularmente, sabiendo que tiene estudios universitarios.
- d) Tenga estudios universitarios, sabiendo que no lee regularmente.

Ejercicio 3: Enunciado Narrativo (Sucesos)

En una academia de idiomas, el 55% de los estudiantes estudia inglés (I), el 30% francés (F) y el 15% estudia ambos idiomas.

- a) ¿Qué porcentaje de estudiantes no estudia ninguno de los dos idiomas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar estudie solo inglés?
- c) ¿Son independientes los sucesos "estudiar inglés" y "estudiar francés"? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 4: Diagrama de Árbol (Extracciones)

En una urna hay 4 bolas rojas (R) y 2 bolas azules (A). Se extraen dos bolas consecutivamente. Dibuja el diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que:

- a) Ambas bolas sean del mismo color si la primera bola **se devuelve** a la urna.
- b) Ambas bolas sean del mismo color si la primera bola **no se devuelve** a la urna.
- c) La segunda bola sea roja, sin importar el color de la primera (con reemplazamiento).
- d) La segunda bola sea azul, sabiendo que la primera fue roja (sin reemplazamiento).

Ejercicio 5: Cálculo de Probabilidad

Sabiendo que para dos sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es 0,9, que la probabilidad de A es 0,7 y que son sucesos independientes. Calcula la probabilidad de B.

SOLUCIÓN ELABORADA DEL EXAMEN

A continuación se presentan los cálculos justificados paso a paso para cada ejercicio.

Solución Ejercicio 1: Operaciones con Sucesos

Datos iniciales:

$P(\overline{A}) = 0,6$

$P(B) = 0,5$

$P(A \cap B) = 0,2$

Cálculos:

- a)
  $P(A)$
  Utilizamos la probabilidad del suceso contrario:
  $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = \mathbf{0,4}$
- b)
  $P(\overline{B})$
  De igual forma para B:
  $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = \mathbf{0,5}$
- c)
  $P(A \cup B)$
  Usamos la ley de la adición:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Sustituyendo los valores:
  $P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = \mathbf{0,7}$
- d)
  $P(A \cap \overline{B})$
  Es la probabilidad de que ocurra A pero no B. Se calcula restando la intersección a la probabilidad de A:
  $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
  $P(A \cap \overline{B}) = 0,4 - 0,2 = \mathbf{0,2}$
- e)
  $P(A/B)$
  Es una probabilidad condicionada:
  $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  $P(A/B) = \dfrac{0,2}{0,5} = \mathbf{0,4}$

- **f) Independencia de A y B**
  Dos sucesos son independientes si se cumple que
  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
  .
  Comprobamos con nuestros valores:
  $P(A \cap B) = 0,2$
  $P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$
  Como
  $0,2 = 0,2$
  , **los sucesos A y B son independientes**. (También se comprueba porque
  $P(A/B) = 0,4 = P(A)$).

Solución Ejercicio 2: Tabla de Contingencia

1. Completar la tabla:

Primero, rellenamos las celdas que se pueden deducir sumando o restando las marginales.

- S-TOTAL (Total de personas sin estudios universitarios):
  $150 - 60 = 90$
  .
- S-L (Personas sin estudios que leen):
  $90 - 55 = 35$
  .
- U-L (Personas con estudios que leen):
  $70 - 35 = 35$
  .
- U-NL (Personas con estudios que no leen):
  $60 - 35 = 25$
  .
- NL-TOTAL (Total de personas que no leen):
  $150 - 70 = 80$
  (o $25 + 55 = 80$).

La tabla completa queda así:

Nivel de Estudios \ Hábito de Lectura	**Lee regularmente (L)**	**No lee (NL)**	**TOTAL**
Estudios Universitarios (U)	35	25	**60**

Sin Estudios Universitarios (S)	35	**55**	90
TOTAL	**70**	80	**150**

2. Responder a las preguntas (N=150):

- a) Probabilidad de estudios universitarios y no leer regularmente ($P(U \cap NL)$)
  De la tabla, hay 25 personas en esta categoría.
  $P(U \cap NL) = \frac{25}{150} = \frac{1}{6} \approx \mathbf{0,167}$
- b) Probabilidad de no tener estudios universitarios o leer regularmente ($P(S \cup L)$)
  Usamos la fórmula de la unión:
  $P(S) + P(L) - P(S \cap L)$
  $P(S \cup L) = \frac{90}{150} + \frac{70}{150} - \frac{35}{150}$
  $P(S \cup L) = \frac{90 + 70 - 35}{150} = \frac{125}{150} = \frac{5}{6} \approx \mathbf{0,833}$
- c) Probabilidad de leer regularmente, sabiendo que tiene estudios universitarios ($P(L/U)$)
  Probabilidad condicionada: restringimos el total al grupo de personas con estudios universitarios (TOTAL=60).
  $P(L/U) = \frac{P(L \cap U)}{P(U)} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12} \approx \mathbf{0,583}$
- d) Probabilidad de tener estudios universitarios, sabiendo que no lee regularmente ($P(U/NL)$)
  Probabilidad condicionada: restringimos el total al grupo de personas que no leen (TOTAL=80).
  $P(U/NL) = \frac{P(U \cap NL)}{P(NL)} = \frac{25}{80} = \frac{5}{16} = \mathbf{0,3125}$

Solución Ejercicio 3: Enunciado Narrativo (Sucesos)

Datos en formato de probabilidad:

$P(I) = 0,55$

$P(F) = 0,30$

$P(I \cap F) = 0,15$

Cálculos:

- **a) Porcentaje de estudiantes que no estudia ninguno de los dos idiomas**
  Primero calculamos la probabilidad de que estudien al menos uno (la unión):
  $P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F)$
  $P(I \cup F) = 0,55 + 0,30 - 0,15 = 0,70$
  El porcentaje de estudiantes que estudia inglés o francés es del 70%.
  La probabilidad de no estudiar ninguno es el suceso contrario a la unión:
  $P(\text{Ninguno}) = 1 - P(I \cup F) = 1 - 0,70 = 0,30$
  Resultado: El **30%** de los estudiantes no estudia ninguno de los dos idiomas.
- **b) Probabilidad de que un estudiante estudie solo inglés**
  Esto es la probabilidad de inglés restando aquellos que también estudian francés (la intersección):
  $P(\text{Solo I}) = P(I) - P(I \cap F)$
  $P(\text{Solo I}) = 0,55 - 0,15 = \mathbf{0,40}$
- **c) Independencia de "estudiar inglés" y "estudiar francés"**
  Comprobamos si
  $P(I \cap F) = P(I) \cdot P(F)$
  $P(I \cap F) = 0,15$
  $P(I) \cdot P(F) = 0,55 \cdot 0,30 = 0,165$
  Como $0,15 \neq 0,165$, **los sucesos "estudiar inglés" y "estudiar francés" son dependientes**.

Solución Ejercicio 4: Diagrama de Árbol (Extracciones)

Composición inicial: 4 Rojas (R), 2 Azules (A). Total = 6 bolas.

a) Ambas bolas del mismo color con reemplazamiento

Dibuja el árbol mentalmente:

- 1ª extracción:
  $P(R) = 4/6$,
  $P(A) = 2/6$.
- Al haber reemplazamiento, la urna no cambia para la 2ª extracción.
- 2ª extracción (si la 1ª fue R):
  $P(R/R) = 4/6$,
  $P(A/R) = 2/6$.
- 2ª extracción (si la 1ª fue A):
  $P(R/A) = 4/6$,
  $P(A/A) = 2/6$.

Probabilidad de mismo color ($R \cap R$ o $A \cap A$):

$$P(\text{Mismo color})_{\text{con r.}} = P(R) \cdot P(R) + P(A) \cdot P(A)$$

$$P(\text{Mismo color})_{\text{con r.}} = \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) = \frac{16}{36} + \frac{4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx \mathbf{0,556}$$

b) Ambas bolas del mismo color sin reemplazamiento

Aquí la urna cambia para la segunda extracción:

- 1ª extracción:
  $P(R) = 4/6$, $P(A) = 2/6$.
- 2ª extracción si la 1ª fue Roja (quedan 3R, 2A, Total=5):
  $P(R/R) = 3/5$, $P(A/R) = 2/5$.
- 2ª extracción si la 1ª fue Azul (quedan 4R, 1A, Total=5):
  $P(R/A) = 4/5$, $P(A/A) = 1/5$.

Probabilidad de mismo color:

$$P(\text{Mismo color})_{\text{sin r.}} = P(R) \cdot P(R/R) + P(A) \cdot P(A/A)$$

$$P(\text{Mismo color})_{\text{sin r.}} = \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{30} + \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \approx \mathbf{0,467}$$

c) Segunda bola roja con reemplazamiento

Al haber reemplazamiento, la segunda bola es independiente de la primera.

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap R_2) = \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6}\right) = \frac{16}{36} + \frac{8}{36} = \frac{24}{36} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

(También se podría decir directamente: la composición no cambia, así que sigue habiendo 4/6 bolas rojas).

d) Segunda bola azul sabiendo que la primera fue roja sin reemplazamiento

Es una probabilidad condicionada directa de una rama del árbol de la parte (b):

Quedaban 3 Rojas y 2 Azules para un total de 5.

$$P(A_2/R_1)_{\text{sin r.}} = \mathbf{\frac{2}{5}} = \mathbf{0,4}$$

Solución Ejercicio 5: Cálculo de Probabilidad

Datos:

$P(A \cup B) = 0,9$

(Al menos uno de ellos).

$P(A) = 0,7$

A y B son sucesos independientes, lo que implica que

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Planteamiento:

Usamos la fórmula de la unión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Al ser independientes, sustituimos la intersección:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (P(A) \cdot P(B))$

Ahora sustituimos los valores conocidos:

$0,9 = 0,7 + P(B) - (0,7 \cdot P(B))$

Resolución de la ecuación:

Agrupamos los términos con $P(B)$. Recordamos que $P(B)$ es lo mismo que $1 \cdot P(B)$.

$0,9 - 0,7 = 1 \cdot P(B) - 0,7 \cdot P(B)$

$0,2 = (1 - 0,7) \cdot P(B)$

$0,2 = 0,3 \cdot P(B)$

Despejamos $P(B)$: $P(B) = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$

Resultado: La probabilidad de B es de **2/3 (**$\approx 0,667$**)**.