Examen de matrices, determinantes, sistemas y geometría

Ejercicio 1 (2 puntos) - Matrices

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (0,75p) Calcula $A \cdot B - 2B^t$.

b) (1,25p) Halla la matriz X que verifica $A \cdot X + B = I$.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Determinantes

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0,75p) Halla los valores de m para los que A tiene inversa.

b) (0,75p) Para $m = 0$, calcula A^{-1}.

c) (0,5p) Para $m = 2$, calcula $\det\left(3A^{-1}\right)$.

Ejercicio 3 (2 puntos) - Problema de sistemas

Un teatro vendió 200 entradas para una función y recaudó 1540 euros. Las entradas de adulto cuestan 10 euros, las infantiles 5 euros y las de jubilado 6 euros. Se vendieron 20 entradas infantiles más que de jubilado.

a) (0,75p) Plantea el sistema de ecuaciones que permite saber cuántas entradas de cada tipo se vendieron.

b) (1,25p) Resuélvelo e interpreta la solución.

Ejercicio 4 (2 puntos) - Recta y plano

Sean la recta $r:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ y el plano $\pi:\ x + 2y - z = 4$.

a) (0,75p) Estudia la posición relativa de r y π y, si se cortan, halla el punto de corte.

b) (0,5p) Calcula el ángulo que forman r y π.

c) (0,75p) Halla la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Ejercicio 5 (2 puntos) - Distancias y posiciones relativas

Sean el punto $P(2, 1, 3)$ y el plano $\sigma:\ x + 2y + 2z - 1 = 0$.

a) (0,5p) Calcula la distancia de P a σ.

b) (0,75p) Halla el punto simétrico de P respecto de σ.

c) (0,75p) Estudia la posición relativa de las rectas $s_1:\ (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0)$ y $s_2:\ (x, y, z) = (0, 1, 2) + \mu(0, 1, 1)$ y, si se cortan, halla el punto de corte.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2B^t = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - 2B^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos: $A \cdot X = I - B$, luego $X = A^{-1}(I - B)$.

$\det A = 2 - 1 = 1 \neq 0$, así que A es invertible:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 2

a) Por la regla de Sarrus:

$$\det A = 1 + 1 + m^3 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2)$$

A tiene inversa si $\det A \neq 0$, es decir, para $m \neq 1$ y $m \neq -2$.

b) Para $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\det A = (0-1)^2(0+2) = 2$.

Matriz adjunta:

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$.

c) Para $m = 2$: $\det A = (2-1)^2(2+2) = 4$.

$$\det\left(3A^{-1}\right) = 3^3 \cdot \det\left(A^{-1}\right) = 27 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4}$$

Solución Ejercicio 3

a) Llamamos x al número de entradas de adulto, y al de infantiles y z al de jubilado:

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 10x + 5y + 6z = 1540 \\ y - z = 20 \end{cases}$$

b) De la tercera ecuación, $y = z + 20$. Sustituyendo en la primera: $x + 2z + 20 = 200$, luego $x = 180 - 2z$.

Sustituyendo en la segunda:

$$10(180 - 2z) + 5(z + 20) + 6z = 1540$$

$$1900 - 9z = 1540 \;\Rightarrow\; z = 40$$

Entonces $y = 40 + 20 = 60$ y $x = 180 - 80 = 100$.

Se vendieron 100 entradas de adulto, 60 infantiles y 40 de jubilado.

Comprobación: $100 + 60 + 40 = 200$ y $1000 + 300 + 240 = 1540$ euros.

Solución Ejercicio 4

a) r pasa por $Q(1, 0, -1)$ con vector director $\vec{v} = (2, -1, 1)$. El vector normal de π es $\vec{n} = (1, 2, -1)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 2 - 1 = -1 \neq 0$$

La recta y el plano son secantes. Paramétricas de r: $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = -1 + t$. Sustituyendo en π:

$$(1 + 2t) + 2(-t) - (-1 + t) = 4 \;\Rightarrow\; 2 - t = 4 \;\Rightarrow\; t = -2$$

Punto de corte: $(-3, 2, -3)$.

b)

$$\operatorname{sin}\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}|\,|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6}$$

$$\alpha = \operatorname{arcsin}\frac{1}{6} \approx 9{,}59^\circ$$

c) El plano buscado contiene a Q y a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$. Su vector normal es:

$$\vec{v} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 5)$$

$$-(x-1)+3y+5(z+1)=0 \;\Rightarrow\; x-3y-5z-6=0$$

Solución Ejercicio 5

a)

$$d(P,\sigma)=\frac{|2+2\cdot 1+2\cdot 3-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$$

b) Recta perpendicular a σ por P: $x=2+\lambda$, $y=1+2\lambda$, $z=3+2\lambda$. Cortamos con σ:

$$(2+\lambda)+2(1+2\lambda)+2(3+2\lambda)-1=0 \;\Rightarrow\; 9+9\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-1$$

Proyección de P sobre σ: $M(1,-1,1)$, que es el punto medio de P y su simétrico P':

$$P'=2M-P=(2-2,\,-2-1,\,2-3)=(0,-3,-1)$$

c) s_1 pasa por $A(1,0,0)$ con $\vec{u}=(1,1,0)$; s_2 pasa por $B(0,1,2)$ con $\vec{w}=(0,1,1)$. Los vectores no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. Con $\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(2-1)-1\cdot(0+1)+0=0$$

Los tres vectores son coplanarios: las rectas son secantes. Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} 1+\lambda=0 \\ \lambda=1+\mu \\ 0=2+\mu \end{cases} \Rightarrow\; \lambda=-1,\ \mu=-2$$

Punto de corte: $(0,-1,0)$.