Examen de matrices, determinantes, sistemas y geometría

Ejercicio 1 (1 punto) - Ecuaciones matriciales

a) (0,5p) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (0,5p) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2 (1,25 puntos) - Rango de una matriz

Estudia el rango de la matriz M según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos) - Discusión de un sistema

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

a) (1,5p) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

b) (1p) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Ejercicio 4 (2,5 puntos) - Rectas y vectores en el espacio

Carla está diseñando el tejado de una casa con Geogebra. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 5)$.

a) (1p) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) (0,5p) ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) (1p) Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0, 0, 1)$. Determina el área de la placa triangular.

Ejercicio 5 (1,5 puntos) - Ángulo entre vectores

Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60°.

Ejercicio 6 (1,25 puntos) - Recta perpendicular a dos vectores

Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Restando la segunda ecuación a la primera se elimina Y:

$$X = (2X - Y) - (X - Y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación, $Y = X - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Sacando factor común X por la izquierda: $X(A - I) = B$.

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A - I| = -2 \neq 0$$

Como existe la inversa:

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 2

M tiene 3 filas, luego $\operatorname{rg}(M) \leq 3$. Hay cuatro menores de orden 3.

La tercera columna es el triple de la primera, así que los menores que contienen ambas columnas valen 0.

Los otros dos menores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8 - 3t & -2 \end{vmatrix} = (-2t - 16 + 6t) + 8 + (8 - 4t) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ t & 3 & 2 \\ 8 - 3t & 3 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 3(4t - 16) + (12t - 24) = 0$$

Todos los menores de orden 3 son nulos para cualquier t, luego $\operatorname{rg}(M) \leq 2$.

Además $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ (filas 2 y 3, columnas 1 y 4).

Por tanto $\operatorname{rg}(M) = 2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución Ejercicio 3

a) Determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a(a-2) - 2(2-5) + (4-5a) = a^2 - 7a + 10 = (a-2)(a-5)$$

1. Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3 = n$, sistema compatible determinado (solución única).
2. Si $a = 2$: las dos primeras filas de A coinciden y $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A) = 2$.
   Pero $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A^*) = 3$. Sistema incompatible (sin solución).
3. Si $a = 5$: la primera y la tercera ecuación son idénticas, y $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3$. Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones, con un parámetro).

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Restando la primera a la tercera: $4x = 0$, luego $x = 0$.

La segunda queda $y + z = 1$ y la primera $2y + z = 1$; restando, $y = 0$ y $z = 1$.

$$(x, y, z) = (0, 0, 1)$$

Solución Ejercicio 4

a) Vector director: $\overrightarrow{AB} = (-4, 5, 2)$. La recta pasa por A:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{2}$$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 25 + 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71$ unidades.

c) $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -2)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-12, -12, 6)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{144 + 144 + 36} = \frac{18}{2} = 9 \text{ u}^2$$

Solución Ejercicio 5

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = \frac{2a-1}{\sqrt{1+2a^2}\,\sqrt{5}}$$

Como el coseno es positivo, hace falta $2a-1>0$. Elevando al cuadrado:

$$5(1+2a^2) = 4(2a-1)^2 \;\Rightarrow\; 6a^2-16a-1=0 \;\Rightarrow\; a=\frac{8\pm\sqrt{70}}{6}$$

Con $a=\dfrac{8-\sqrt{70}}{6}\approx -0{,}06$ se tiene $2a-1<0$ (ángulo de 120°), así que se descarta.

$$a=\frac{8+\sqrt{70}}{6}\approx 2{,}73$$

Solución Ejercicio 6

La recta es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego su dirección es $\vec{u}\times\vec{v}$:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,-2)$$

Recta por $A(1,0,0)$:

$$(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(0,1,-2), \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$