Examen de matrices

Ejercicio 1 (1,5 puntos) - Operaciones con la traspuesta

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $2C - \frac{1}{2}(A \cdot B)^T$.

Ejercicio 2 (2,5 puntos) - Operaciones y potencias

Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (0,75p) Calcula $\frac{1}{2}M + 3N^T$.

b) (0,75p) Calcula $M^2 - 4M + 3I$.

c) (1p) Calcula $(P \cdot Q)^2$.

Ejercicio 3 (1,5 puntos) - Sistema de ecuaciones matriciales

Halla las matrices X e Y de dimensión 2×2 que cumplen:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2,5 puntos) - Ecuaciones matriciales

a) (1,25p) Resuelve $A \cdot X \cdot B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) (1,25p) Resuelve $Y \cdot D - 3Y = E$, siendo $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5 (2 puntos) - Potencia n-ésima de una matriz

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

a) (0,75p) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) (0,75p) Deduce razonadamente la expresión de A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) (0,5p) Resuelve la ecuación $A^{15} - 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Resolución

Solución Ejercicio 1

A es 2×3 y B es 3×2, así que $A\cdot B$ es 2×2:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2+0+0 & 8+2+0\\ 1+0-6 & 4-6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & -4\end{pmatrix}\qquad \frac{1}{2}(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2}\\ 5 & -2\end{pmatrix}$$

$$2C-\frac{1}{2}(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2}\\ 5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & \frac{1}{2}\\ 3 & 8\end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 2

a) $N^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$:

$$\frac{1}{2}M+3N^T=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 3\\ -9 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{15}{2} & \frac{7}{2}\\ -10 & \frac{25}{2}\end{pmatrix}$$

b)

$$M^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-2 & 3+1\\ -6-2 & -2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -8 & -1\end{pmatrix}$$

$$M^2-4M+3I=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -8 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 4\\ -8 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

c) $P\cdot Q$ es 2×2:

$$P\cdot Q=\begin{pmatrix}2+0-3 & 4+0-1\\ 1+2+9 & 2+0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 12 & 5\end{pmatrix}$$

$$(P\cdot Q)^2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 12 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 12 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+36 & -3+15\\ -12+60 & 36+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37 & 12\\ 48 & 61\end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 3

Multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la sumamos a la primera para eliminar Y:

$$7X=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 8\\ -6 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14\\ 0 & -7\end{pmatrix}\implies X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación despejamos $Y=2X-\begin{pmatrix}3 & 4\\ -3 & -4\end{pmatrix}$:

$$Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

Comprobación: $3X+2Y=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix}$.

Solución Ejercicio 4

a) $|A| = 6 - 5 = 1 \neq 0$ y $|B| = 3 - 2 = 1 \neq 0$, así que las dos son invertibles. Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Sacamos factor común Y por la izquierda, escribiendo $3Y = Y \cdot 3I$:

$$Y(D - 3I) = E \implies Y = E \cdot (D - 3I)^{-1}$$

$$D - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad |D - 3I| = 4 - 3 = 1 \qquad (D - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & -1+4 \\ -2-12 & 1+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -14 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 5

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

b) En cada potencia el elemento de la posición $(2, 1)$ aumenta en 3 y el resto no cambia:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

Se justifica así: si A^n tiene esa forma, $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n+3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$, que también la tiene.

c) $A^{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 45 & 1 \end{pmatrix}$. Despejamos X:

$$2X = A^{15} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 40 & 2 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$