Examen de matrices y determinantes

Ejercicio 1 (2 puntos) - Operaciones con matrices

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

a) (0,5p) Calcula $2A - B^t$.

b) (0,75p) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Conmutan A y B?

c) (0,75p) Calcula A^2 y, a partir del resultado, deduce A^{2026} y A^{2027}.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Cálculo y propiedades de los determinantes

a) (1p) Calcula el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) (1p) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 con $|M| = -2$. Calcula, justificando las propiedades que uses, $|3M|$, $|-M|$, $|M^{-1}|$ y $|M \cdot M^t|$.

Ejercicio 3 (2 puntos) - Matriz inversa

Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0,5p) Justifica que C tiene inversa.

b) (1,5p) Calcula C^{-1} mediante la matriz adjunta.

Ejercicio 4 (2 puntos) - Ecuaciones matriciales

Dadas $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, despeja X en cada una de las siguientes ecuaciones, justificando que es posible (no hace falta calcularla):

a) (0,25p) $P \cdot X + Q = R$

b) (0,25p) $X \cdot P - 2X = R$

c) (0,25p) $P \cdot X \cdot Q = R$

d) (0,25p) $P \cdot X - Q = X$

e) (1p) Calcula la matriz X que cumple la ecuación del apartado d).

Ejercicio 5 (2 puntos) - Discusión según un parámetro

Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) (1,25p) Calcula $|A_k|$ y determina para qué valores de k la matriz A_k es invertible.

b) (0,75p) Estudia el rango de A_k para los valores de k en los que no es invertible.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, luego

$$2A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Multiplicando filas por columnas:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1+6 & 0-3 \\ 0+4 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $A \cdot B \neq B \cdot A$, las matrices no conmutan.

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Las potencias pares valen I y las impares valen A:

$$A^{2026} = (A^2)^{1013} = I, \quad A^{2027} = A^{2026}\cdot A = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 2

a) Por la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (8 + 0 + 6) - (-12 - 1 + 0) = 14 + 13 = 27$$

b) Usamos que $|\lambda M| = \lambda^n |M|$ con $n = 3$, $|M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$, $|M^t| = |M|$ y $|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$:

$$|3M| = 3^3 \cdot (-2) = -54$$

$$|-M| = (-1)^3 \cdot (-2) = 2$$

$$|M^{-1}| = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$|M \cdot M^t| = |M| \cdot |M^t| = (-2)\cdot(-2) = 4$$

Solución Ejercicio 3

a) Por Sarrus, $|C| = (1 + 2 + 0) - (0 + 0 + 0) = 3 \neq 0$, así que C es invertible.

b) Usamos $C^{-1} = \frac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t$. Los adjuntos son:

$$C_{11} = 1, \quad C_{12} = 1, \quad C_{13} = -1$$

$$C_{21} = -2, \quad C_{22} = 1, \quad C_{23} = 2$$

$$C_{31} = 2, \quad C_{32} = -1, \quad C_{33} = 1$$

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}(C))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $C \cdot C^{-1} = I$.

Solución Ejercicio 4

Calculamos los determinantes que vamos a necesitar:

$$|P| = 3 - 1 = 2 \neq 0, \quad |Q| = 1 \neq 0$$

$$P - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |P - 2I| = -2 \neq 0$$

$$P - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |P - I| = -1 \neq 0$$

a) Restando Q y multiplicando por P^{-1} por la izquierda (P es invertible):

$$P \cdot X = R - Q \Rightarrow X = P^{-1} \cdot (R - Q)$$

b) Sacando X factor común por la izquierda, escribiendo $2X = X \cdot 2I$:

$$X \cdot (P - 2I) = R \Rightarrow X = R \cdot (P - 2I)^{-1}$$

Es posible porque $P - 2I$ es invertible.

c) Multiplicando por P^{-1} por la izquierda y por Q^{-1} por la derecha (ambas son invertibles):

$$X = P^{-1} \cdot R \cdot Q^{-1}$$

d) Pasando X a la izquierda y Q a la derecha, y sacando X factor común por la derecha:

$$P \cdot X - X = Q \Rightarrow (P - I) \cdot X = Q \Rightarrow X = (P - I)^{-1} \cdot Q$$

Es posible porque $P - I$ es invertible.

e) Calculamos la inversa de $P - I$:

$$(P - I)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $P \cdot X - Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$.

Solución Ejercicio 5

a) Por Sarrus:

$$|A_k| = (1 + k^2 + 2) - (1 + k + 2k) = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2)$$

$$|A_k| = 0 \iff k = 1 \text{ o } k = 2$$

A_k es invertible si y solo si $k \neq 1$ y $k \neq 2$.

b)

1. Si $k = 1$, $|A_1| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, así que $\operatorname{rg}(A_1) = 2$.
2. Si $k = 2$, $|A_2| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, así que $\operatorname{rg}(A_2) = 2$.