Examen de matrices y determinantes

Instrucciones: elige dos ejercicios de cada bloque. Redacta con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.

Bloque 1: Matrices

Ejercicio 1 (2,5 puntos) - Rango según un parámetro

Determina, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ m & 1 & 1 & 3-m \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos) - Ecuación matricial

Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - B^t = 2X$, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos) - Matrices que cumplen una condición

Halla todas las matrices X de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{tales que} \quad X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 (2,5 puntos) - Potencia enésima

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la potencia enésima de A.

Bloque 2: Determinantes

Ejercicio 5 (2,5 puntos) - Cálculo de determinantes

Calcula los siguientes determinantes:

a) (1,25p) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

b) (1,25p) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Ejercicio 6 (2,5 puntos) - Propiedades de los determinantes

a) (1,25p) Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Si sabemos que $|3A| = -54$, ¿cuánto vale $|A|$? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado.

b) (1,25p) Dadas dos matrices A y B de orden 4 con $|A| = 2$ y $|B| = -3$, calcula, justificando tu respuesta, $|A^{-1}|$, $|(A \cdot B^{-1})^t|$, $|B^t \cdot A|$, $|3A|$ y $|B^5|$.

Ejercicio 7 (2,5 puntos) - Determinantes sin desarrollar

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, aplica las propiedades de los determinantes para calcular, sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} 2c & b & a+3c \\ 2f & e & d+3f \\ 2i & h & g+3i \end{vmatrix}$$

Ejercicio 8 (2,5 puntos) - Determinante de orden 4

Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

Resolución

Solución Ejercicio 1

Estudiamos primero el menor formado por las tres primeras columnas. Sumando las tres columnas a la primera, sacando factor común y restando la primera fila a las demás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix} = -(m+2)(m-1)^2$$

Se anula si y solo si $m = 1$ o $m = -2$.

1. Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, hay un menor de orden 3 no nulo, luego $\operatorname{rg}(A) = 3$.
2. Si $m = 1$, las tres filas son iguales a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, luego $\operatorname{rg}(A) = 1$.
3. Si $m = -2$, la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, así que el rango es al menos 2. Orlándolo con la tercera fila y las columnas restantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-10 + 8 - 1) - (-4 - 4 + 5) = -3 + 3 = 0$$

Por tanto, $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Solución Ejercicio 2

Despejamos X, escribiendo $2X = X \cdot 2I$ y sacando X factor común por la izquierda:

$$X \cdot A - X \cdot 2I = B^t \Rightarrow X \cdot (A - 2I) = B^t \Rightarrow X = B^t \cdot (A - 2I)^{-1}$$

Calculamos $C = A - 2I$ y su determinante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |C| = (0 + 1 + 0) - (0 + 0 + 0) = 1 \neq 0$$

Así que C es invertible. Sus adjuntos son:

$$C_{11} = 0, \quad C_{12} = 1, \quad C_{13} = 0$$

$$C_{21} = -1, \quad C_{22} = 1, \quad C_{23} = 1$$

$$C_{31} = 1, \quad C_{32} = -1, \quad C_{33} = 0$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}(\operatorname{Adj}(C))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$X = B^t \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 3

Calculamos X^2:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a+c \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la matriz dada:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 1 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

De $a^2 = 1$ y $a + c = 0$: $a = 1, c = -1$ o $a = -1, c = 1$. Además, $b = 2$ o $b = -2$. Hay cuatro soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 4

Calculamos las primeras potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada vez que multiplicamos por A se suma $\frac{1}{2}$ a los elementos de la primera columna bajo la diagonal. Por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n}{2} & 1 & 0 \\ \frac{n}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación por inducción: $A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n+1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{n+1}$.

Solución Ejercicio 5

a) Sumamos todas las columnas a la primera y sacamos factor común $x + 4$; después restamos la primera fila a las demás:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3(x+4)$$

b) Hacemos ceros en la segunda columna usando la primera fila: $F_2 - 3F_1$ y $F_3 + F_1$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna (el 1 ocupa la posición $(1,2)$, de signo $-$):

$$= -\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\left[(-20 + 0 + 6) - (18 + 0 + 4)\right] = -(-14 - 22) = 36$$

Solución Ejercicio 6

a) Si A es de orden n, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$. Con $n = 3$:

$$|3A| = 3^3 |A| = 27|A| = -54 \Rightarrow |A| = -2$$

b) Usamos $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, $|A^t| = |A|$, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y $|\lambda A| = \lambda^4 |A|$ (orden 4):

$$|A^{-1}| = \frac{1}{2}$$

$$|(A \cdot B^{-1})^t| = |A \cdot B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$|B^t \cdot A| = |B| \cdot |A| = (-3) \cdot 2 = -6$$

$$|3A| = 3^4 \cdot 2 = 162$$

$$|B^5| = |B|^5 = (-3)^5 = -243$$

Solución Ejercicio 7

1. Sacamos el factor 2 de la primera columna.
2. A la tercera columna le restamos 3 veces la primera ($C_3 - 3C_1$), lo que no cambia el determinante.
3. Intercambiamos la primera y la tercera columna, lo que cambia el signo.

$$\begin{vmatrix} 2c & b & a+3c \\ 2f & e & d+3f \\ 2i & h & g+3i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & b & a+3c \\ f & e & d+3f \\ i & h & g+3i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$$

Solución Ejercicio 8

Hacemos ceros en la primera columna restando a cada fila la anterior ($F_4 - F_3$, $F_3 - F_2$, $F_2 - F_1$, en ese orden):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 18 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna y aplicando Sarrus:

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & 4 & 18 \end{vmatrix} = (-72 - 12 + 16) - (-8 - 48 + 36) = -68 + 20 = -48$$

También se puede obtener como determinante de Vandermonde de $1, -1, 2, 3$:

$$(-1-1)(2-1)(3-1)(2+1)(3+1)(3-2) = (-2)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1 = -48$$