Examen de matrices y determinantes

Ejercicio 1 (2 puntos) - Operaciones con matrices

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

a) (0,5p) Calcula $3A - B^t$.

b) (0,75p) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Conmutan A y B?

c) (0,75p) Calcula A^2 y, a partir del resultado, deduce A^{2026} y A^{2027}.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Cálculo y propiedades de los determinantes

a) (1p) Calcula el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

b) (1p) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 con $|M| = 3$. Calcula, justificando las propiedades que uses, $|2M|$, $|-M|$, $|M^{-1}|$ y $|M^2 \cdot M^t|$.

Ejercicio 3 (2 puntos) - Matriz inversa

Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0,5p) Justifica que C tiene inversa.

b) (1,5p) Calcula C^{-1} mediante la matriz adjunta.

Ejercicio 4 (2 puntos) - Ecuaciones matriciales

Dadas $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, despeja X en cada una de las siguientes ecuaciones, justificando que es posible (no hace falta calcularla):

a) (0,25p) $X \cdot P + Q = R$

b) (0,25p) $P \cdot X - 3X = R$

c) (0,25p) $Q \cdot X \cdot P = R$

d) (0,25p) $X \cdot P - Q = X$

e) (1p) Calcula la matriz X que cumple la ecuación del apartado d).

Ejercicio 5 (2 puntos) - Discusión según un parámetro

Sea $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) (1,25p) Calcula $|A_k|$ y determina para qué valores de k la matriz A_k es invertible.

b) (0,75p) Estudia el rango de A_k para los valores de k en los que no es invertible.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) $3A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, luego

$$3A - B^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Multiplicando filas por columnas:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + 0 \cdot 0 & (-1)\cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2+3 & 0+1 \\ 0-3 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $A \cdot B \neq B \cdot A$, las matrices no conmutan.

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Las potencias pares valen I y las impares valen A:

$$A^{2026} = (A^2)^{1013} = I, \quad A^{2027} = A^{2026} \cdot A = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 2

a) Por la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (24 + 1 + 0) - (-4 + 0 - 3) = 25 + 7 = 32$$

b) Usamos que $|\lambda M| = \lambda^n |M|$ con $n = 3$, $|M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$, $|M^t| = |M|$ y $|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$:

$$|2M| = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$|-M| = (-1)^3 \cdot 3 = -3$$

$$|M^{-1}| = \frac{1}{3}$$

$$|M^2 \cdot M^t| = |M|^2 \cdot |M^t| = 3^2 \cdot 3 = 27$$

Solución Ejercicio 3

a) Por Sarrus, $|C| = (1 + 0 + 2) - (0 + 0 + 0) = 3 \neq 0$, así que C es invertible.

b) Usamos $C^{-1} = \frac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t$. Los adjuntos son:

$$C_{11} = 1, \quad C_{12} = -2, \quad C_{13} = 2$$

$$C_{21} = 1, \quad C_{22} = 1, \quad C_{23} = -1$$

$$C_{31} = -1, \quad C_{32} = 2, \quad C_{33} = 1$$

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}(C))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $C \cdot C^{-1} = I$.

Solución Ejercicio 4

Calculamos los determinantes que vamos a necesitar:

$$|P| = 2 - 1 = 1 \neq 0, \quad |Q| = 1 \neq 0$$

$$P - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad |P - 3I| = 1 \neq 0$$

$$P - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |P - I| = -1 \neq 0$$

a) Restando Q y multiplicando por P^{-1} por la derecha (P es invertible):

$$X \cdot P = R - Q \Rightarrow X = (R - Q) \cdot P^{-1}$$

b) Sacando X factor común por la derecha, escribiendo $3X = 3I \cdot X$:

$$(P - 3I) \cdot X = R \Rightarrow X = (P - 3I)^{-1} \cdot R$$

Es posible porque $P - 3I$ es invertible.

c) Multiplicando por Q^{-1} por la izquierda y por P^{-1} por la derecha (ambas son invertibles):

$$X = Q^{-1} \cdot R \cdot P^{-1}$$

d) Pasando X a la izquierda y Q a la derecha, y sacando X factor común por la izquierda:

$$X \cdot P - X = Q \Rightarrow X \cdot (P - I) = Q \Rightarrow X = Q \cdot (P - I)^{-1}$$

Es posible porque $P - I$ es invertible.

e) Calculamos la inversa de $P - I$:

$$(P - I)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $X \cdot P - Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = X$.

Solución Ejercicio 5

a) Por Sarrus:

$$|A_k| = (k^3 + 1 + 1) - (k + k + k) = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2)$$

$$|A_k| = 0 \iff k = 1 \text{ o } k = -2$$

A_k es invertible si y solo si $k \neq 1$ y $k \neq -2$.

b)

1. Si $k = 1$, las tres filas son $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iguales y no nulas, así que $\operatorname{rg}(A_1) = 1$.
2. Si $k = -2$, $|A_{-2}| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, así que $\operatorname{rg}(A_{-2}) = 2$.