Examen de programación lineal

Ejercicio 1 (2 puntos) - Fábrica de bicicletas

Una fábrica produce bicicletas de paseo y de montaña. Cada bicicleta de paseo necesita 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y cada bicicleta de montaña 2 kg de acero y 2 kg de aluminio. Se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. El beneficio es de 20 euros por bicicleta de paseo y 30 euros por bicicleta de montaña.

a) (0,75p) Plantea el problema de programación lineal.

b) (0,75p) Representa la región factible y halla sus vértices.

c) (0,5p) ¿Cuántas bicicletas de cada tipo deben fabricarse para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Ejercicio 2 (2 puntos) - Mezcla de piensos

Un ganadero alimenta a sus animales con dos piensos, A y B. Cada kilo de pienso A aporta 2 unidades de proteínas y 1 de grasas, y cada kilo de pienso B aporta 1 unidad de proteínas y 3 de grasas. Cada animal necesita al día al menos 8 unidades de proteínas y 9 de grasas. El kilo de pienso A cuesta 3 euros y el de B, 2 euros.

a) (0,75p) Plantea el problema de programación lineal.

b) (0,75p) Representa la región factible y halla sus vértices.

c) (0,5p) ¿Qué cantidad de cada pienso minimiza el coste diario por animal? ¿Cuál es ese coste?

Ejercicio 3 (2 puntos) - Cultivo de cereales

Un agricultor dispone de 10 hectáreas para sembrar trigo y cebada. Cultivar una hectárea de trigo cuesta 200 euros y una de cebada 100 euros, y dispone de 1600 euros. Por contrato debe sembrar al menos 2 hectáreas de trigo. Cada hectárea de trigo le deja un beneficio de 300 euros y cada hectárea de cebada, 200 euros.

a) (0,75p) Plantea el problema de programación lineal.

b) (0,75p) Representa la región factible y halla sus vértices.

c) (0,5p) ¿Cuántas hectáreas de cada cereal debe sembrar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Ejercicio 4 (2 puntos) - Taller de joyería

Un taller fabrica anillos y pulseras. Un anillo necesita 2 g de oro y 3 g de plata, y una pulsera 3 g de oro y 2 g de plata. Cada mes dispone de 1500 g de oro y 1500 g de plata. Gana 40 euros por anillo y 60 euros por pulsera.

a) (0,75p) Plantea el problema de programación lineal.

b) (0,75p) Representa la región factible y halla sus vértices.

c) (0,5p) ¿Cuántos anillos y pulseras debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿Es única la solución?

Ejercicio 5 (2 puntos) - Excursión escolar

Un colegio organiza una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 50 plazas y 10 de 40 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. Alquilar un autobús grande cuesta 800 euros y uno pequeño 600 euros.

a) (0,75p) Plantea el problema de programación lineal.

b) (0,75p) Representa la región factible y halla sus vértices.

c) (0,5p) ¿Cuántos autobuses de cada tipo deben alquilarse para que la excursión resulte lo más barata posible? ¿Cuál es el coste?

Resolución

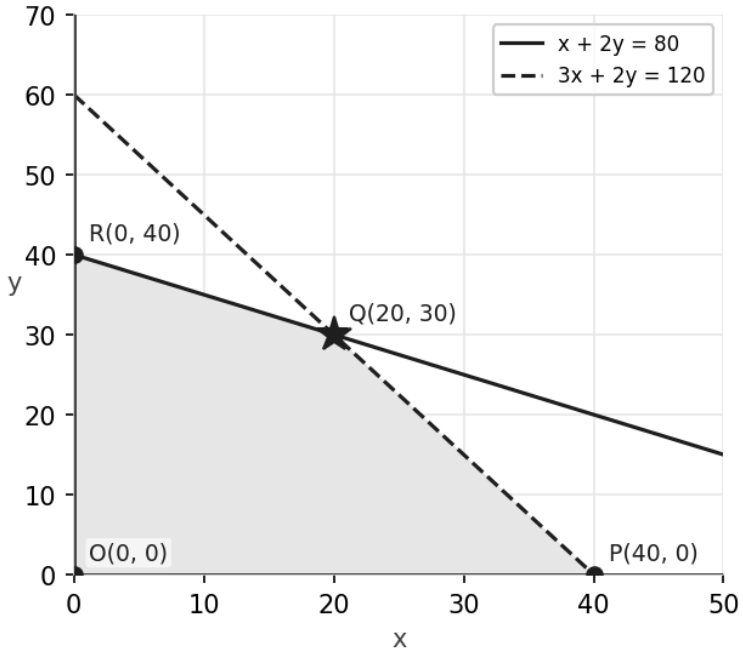
Solución Ejercicio 1

a) Sean x las bicicletas de paseo e y las de montaña. Maximizar $B(x,y) = 20x + 30y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Las rectas $x + 2y = 80$ y $3x + 2y = 120$ se cortan en: restando, $2x = 40$, así que $x = 20$, $y = 30$.

La región factible es el cuadrilátero de vértices $O(0,0)$, $P(40,0)$, $Q(20,30)$ y $R(0,40)$.



c) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$B(0,0) = 0, \quad B(40,0) = 800, \quad B(20,30) = 1300, \quad B(0,40) = 1200$$

El máximo beneficio, 1300 euros, se obtiene fabricando 20 bicicletas de paseo y 30 de montaña.

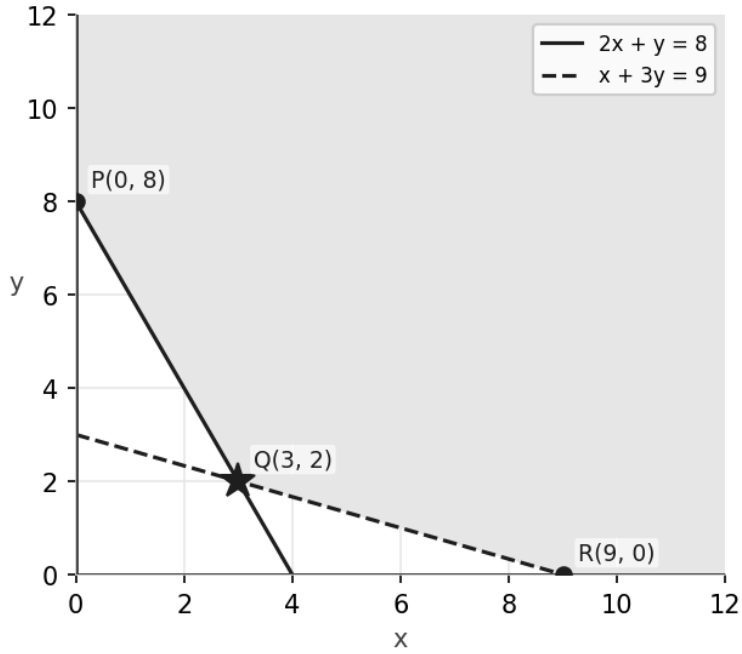
Solución Ejercicio 2

a) Sean x los kilos de pienso A e y los de pienso B. Minimizar $C(x,y) = 3x + 2y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 8 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Las rectas $2x + y = 8$ y $x + 3y = 9$ se cortan en: de la segunda, $x = 9 - 3y$; sustituyendo, $18 - 6y + y = 8$, así que $y = 2$, $x = 3$.

La región factible es no acotada, con vértices $P(0, 8)$, $Q(3, 2)$ y $R(9, 0)$.



c) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$C(0, 8) = 16, \quad C(3, 2) = 13, \quad C(9, 0) = 27$$

Como los coeficientes de C son positivos y la región se extiende hacia valores mayores de x e y, el mínimo existe y está en un vértice: el coste mínimo es 13 euros, con 3 kg de pienso A y 2 kg de pienso B.

Solución Ejercicio 3

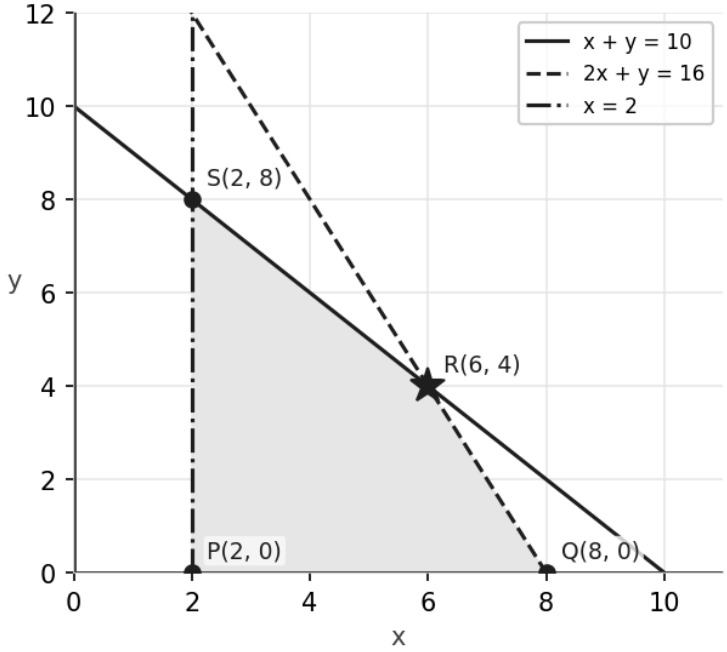
a) Sean x las hectáreas de trigo e y las de cebada. Maximizar $B(x, y) = 300x + 200y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 200x + 100y \leq 1600 \\ x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La segunda restricción simplificada es $2x + y \leq 16$.

b) Vértices:

1. $x = 2$ con $y = 0$: $P(2, 0)$.
2. $2x + y = 16$ con $y = 0$: $Q(8, 0)$.
3. $x + y = 10$ con $2x + y = 16$: restando, $x = 6$, $y = 4$: $R(6, 4)$.
4. $x = 2$ con $x + y = 10$: $S(2, 8)$.



c) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$B(2,0) = 600, \quad B(8,0) = 2400, \quad B(6,4) = 2600, \quad B(2,8) = 2200$$

El máximo beneficio, 2600 euros, se obtiene sembrando 6 hectáreas de trigo y 4 de cebada.

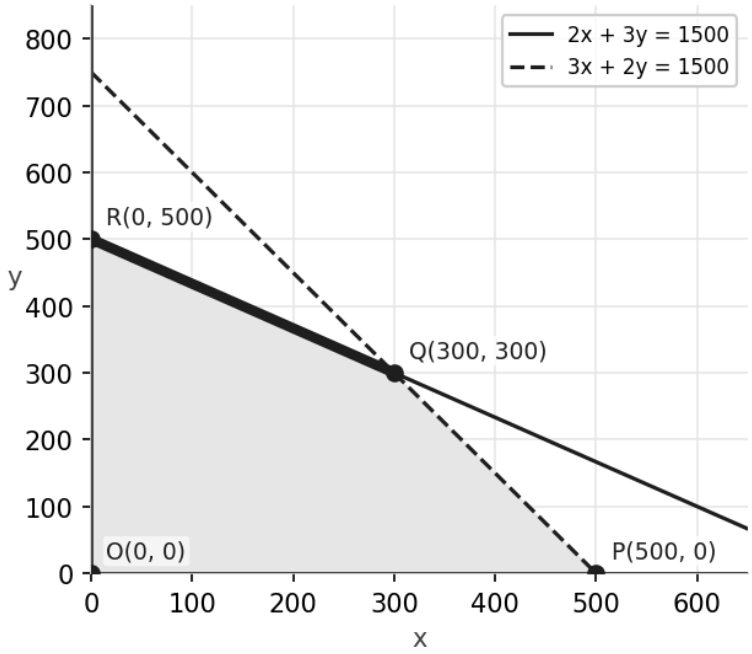
Solución Ejercicio 4

a) Sean x los anillos e y las pulseras. Maximizar $B(x,y) = 40x + 60y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 1500 \\ 3x + 2y \leq 1500 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Las rectas $2x + 3y = 1500$ y $3x + 2y = 1500$ se cortan en: sumando, $5x + 5y = 3000$, así que $x + y = 600$; restando, $x - y = 0$. Luego $x = y = 300$.

La región factible es el cuadrilátero de vértices $O(0,0)$, $P(500,0)$, $Q(300,300)$ y $R(0,500)$.



c) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$B(0,0)=0, \quad B(500,0)=20000, \quad B(300,300)=30000, \quad B(0,500)=30000$$

El máximo, 30000 euros, se alcanza en dos vértices, así que la solución no es única: se alcanza en todos los puntos del segmento $\overline{QR}$, porque la función objetivo $40x+60y=20(2x+3y)$ es paralela a la restricción del oro.

Las soluciones con número entero de piezas son los puntos de ese segmento con coordenadas enteras, por ejemplo $(0,500)$, $(3,498)$, $(150,400)$ o $(300,300)$.

Solución Ejercicio 5

a) Sean x los autobuses grandes e y los pequeños. Minimizar $C(x,y)=800x+600y$ sujeto a:

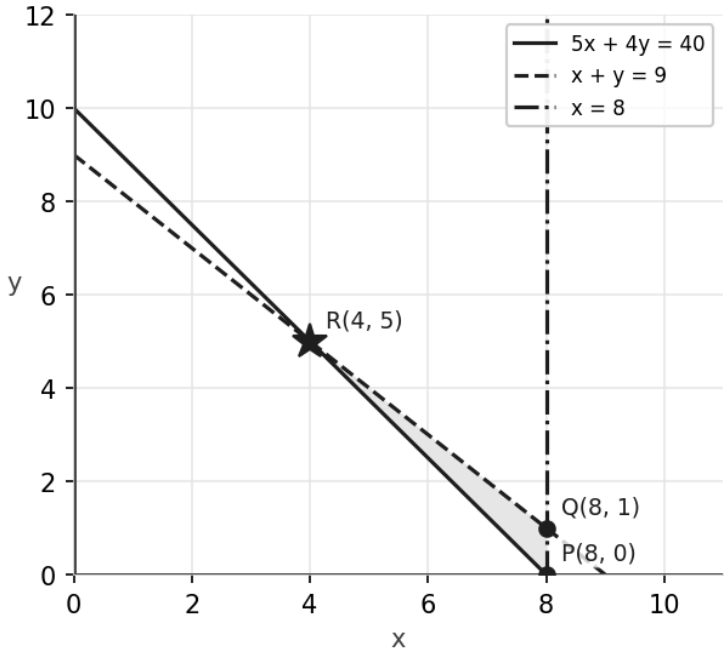
$$\begin{cases} 50x+40y \geq 400 \\ x+y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

La primera restricción simplificada es $5x+4y \geq 40$.

b) Vértices:

1. $x=8$ con $5x+4y=40$: $y=0$, $P(8,0)$.
2. $x=8$ con $x+y=9$: $Q(8,1)$.
3. $x+y=9$ con $5x+4y=40$: $5x+4(9-x)=40$, así que $x=4$, $y=5$: $R(4,5)$.

La restricción $y \leq 10$ no influye, porque $x+y \leq 9$ ya obliga a $y \leq 9$. La región factible es el triángulo PQR.



c) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$C(8,0) = 6400, \quad C(8,1) = 7000, \quad C(4,5) = 6200$$

El coste mínimo, 6200 euros, se obtiene alquilando 4 autobuses grandes y 5 pequeños.