Examen de sistemas de ecuaciones con matrices

Ejercicio 1 (3 puntos) - Ecuación matricial

Resuelve de forma matricial el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (3,5 puntos) - Discusión con un parámetro

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

Discute el sistema en función del valor del parámetro k.

Ejercicio 3 (3,5 puntos) - Problema y regla de Cramer

Un cine vende 100 entradas para una sesión.

La entrada de adulto cuesta 8 €, la de niño 5 € y la de jubilado 4 €.

La recaudación total ha sido de 595 € y hay 5 adultos más que niños.

a) (1p) Plantea el sistema de ecuaciones que permite averiguar cuántas entradas de cada tipo se han vendido.

b) (2,5p) Resuélvelo utilizando la regla de Cramer.

Resolución

Solución Ejercicio 1

Escribimos el sistema en forma matricial $AX = B$. La matriz de coeficientes, la de incógnitas y la de términos independientes son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que A es invertible y calculamos A^{-1}.

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = 2(1-1) - 1(1-0) + 0 = -1 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0$, la matriz A es invertible.

Calculamos la matriz adjunta, es decir, los cofactores de cada elemento:

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es simétrica, luego $\operatorname{Adj}(A)^t = \operatorname{Adj}(A)$ y:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A)^t = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial. Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2-1 \\ 4-4+2 \\ -4+4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

Solución Ejercicio 2

Matriz de coeficientes A y matriz ampliada A^*:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2 = (k+2)(k-1)^2$$

Se anula para $k = -2$ y $k = 1$.

Si $k \neq -2$ y $k \neq 1$: $|A| \neq 0$, luego $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 3 = n$. Sistema compatible determinado (solución única).

Si $k = -2$:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, luego $\mathrm{rg}(A) = 2$.

El menor formado por las columnas 2, 3 y 4 vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, luego $\mathrm{rg}(A^*) = 3$.

Como $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^*)$, el sistema es incompatible (no tiene solución).

Si $k = 1$:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales, luego $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 1 < 3$. Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones, con $3 - 1 = 2$ parámetros).

Solución Ejercicio 3

a) Sean x el número de entradas de adulto, y las de niño y z las de jubilado.

Entradas vendidas: $x + y + z = 100$.

Recaudación: $8x + 5y + 4z = 595$.

Hay 5 adultos más que niños: $x = y + 5$, es decir, $x - y = 5$.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 8x + 5y + 4z = 595 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

b) Determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 4) - (0 - 4) + (-8 - 5) = -5 \neq 0$$

El sistema es compatible determinado y podemos aplicar la regla de Cramer: $x = \frac{|A_x|}{|A|}$, $y = \frac{|A_y|}{|A|}$, $z = \frac{|A_z|}{|A|}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 595 & 5 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{400 + 20 - 620}{-5} = \frac{-200}{-5} = 40$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 8 & 595 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-20 + 400 - 555}{-5} = \frac{-175}{-5} = 35$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 8 & 5 & 595 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{620 + 555 - 1300}{-5} = \frac{-125}{-5} = 25$$

Se han vendido 40 entradas de adulto, 35 de niño y 25 de jubilado.