Examen de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1 (1 punto) - Ecuación matricial

Resuelve de forma matricial el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y + z = 8 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (1 punto) - Regla de Cramer

Resuelve, utilizando la regla de Cramer, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (1,5 puntos) - Discusión con un parámetro

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + mz = 2 \\ x + 4y + m^2 z = m^2 \end{cases}$$

a) (1p) Discútelo en función del valor del parámetro m.

b) (0,5p) Resuélvelo para $m = 2$.

Ejercicio 4 (1 punto) - Sistema homogéneo

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

a) (0,5p) Calcula el valor de a para que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.

b) (0,5p) Resuélvelo para ese valor de a.

Ejercicio 5 (1 punto) - Añadir una ecuación

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Añade una tercera ecuación de modo que el sistema resultante sea:

a) (0,5p) Compatible determinado.

b) (0,25p) Compatible indeterminado.

c) (0,25p) Incompatible.

Ejercicio 6 (1 punto) - Sistema con más ecuaciones que incógnitas

Discute el sistema de ecuaciones en función del parámetro m y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \\ x+my=5 \end{cases}$$

Ejercicio 7 (1,5 puntos) - Método de Gauss

Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas:

a) (0,75p) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y-z=-3 \\ 3x-y+2z=11 \end{cases}$

b) (0,75p) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$

Ejercicio 8 (1 punto) - Problema: plantea el sistema

Ana compra 3 libros, 2 cuadernos y 1 bolígrafo y paga 37 €.

Luis compra 1 libro, 4 cuadernos y 3 bolígrafos y paga 25 €.

Un libro cuesta lo mismo que tres cuadernos y un bolígrafo.

Plantea el sistema de ecuaciones que permite calcular el precio de cada artículo. No hace falta resolverlo.

Ejercicio 9 (1 punto) - Problema: plantea el sistema

La suma de las edades de un abuelo, su hijo y su nieto es 120 años.

La edad del abuelo es igual a la del hijo más la del nieto más 20 años.

Hace 5 años, la edad del hijo era siete veces la del nieto.

Plantea el sistema de ecuaciones que permite calcular la edad actual de los tres. No hace falta resolverlo.

Resolución

Solución Ejercicio 1

Escribimos el sistema como $AX = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Determinante de A:

$$|A| = 1(4-1) - 1(2-0) + 0 = 1 \neq 0$$

Luego A es invertible.

Calculamos la matriz adjunta (cofactores):

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es simétrica, luego $\mathrm{Adj}(A)^t = \mathrm{Adj}(A)$ y, como $|A| = 1$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De $AX = B$ se obtiene $X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 16 + 8 \\ -6 + 16 - 8 \\ 3 - 8 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Solución Ejercicio 2

Determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4+1) = -1 + 3 + 5 = 7 \neq 0$$

El sistema es compatible determinado y aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-7}{7} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

La solución es $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

Solución Ejercicio 3

a) Matriz de coeficientes A y matriz ampliada A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & m^2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m & 2 \\ 1 & 4 & m^2 & m^2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = 2m^2 + m + 4 - 2 - 4m - m^2 = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2)$$

Se anula para $m = 1$ y $m = 2$.

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$: $|A| \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3 = n$. Sistema compatible determinado.

Si $m = 1$:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A) = 2$.

El menor formado por las columnas 1, 2 y 4 vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A^*) = 3$.

Como $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A^*)$, el sistema es incompatible.

Si $m = 2$:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Las columnas 2, 3 y 4 son iguales, luego todos los menores de orden 3 se anulan. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango es 2.

Por tanto $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3 = n$. Sistema compatible indeterminado.

b) Para $m = 2$ el sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$$

Como $\mathrm{rg} = 2$, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y llamamos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ x + 2y = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Restando la primera a la segunda: $y = 1 - \lambda$, y sustituyendo: $x = 0$.

La solución es $x = 0$, $y = 1 - \lambda$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución Ejercicio 4

a) Un sistema homogéneo siempre es compatible. Tiene soluciones no triviales cuando $\mathrm{rg}(A) < 3$, es decir, cuando $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3 - 2a) - 1(6 - a) + 1(4 + 1) = -4 - a$$

$$-4 - a = 0 \Rightarrow a = -4$$

b) Para $a = -4$ el sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, luego $\mathrm{rg}(A) = 2$ y podemos eliminar la tercera ecuación.

Llamamos $z = \lambda$ y sumamos las dos primeras ecuaciones: $3x - 3z = 0$, luego $x = \lambda$.

Sustituyendo en la primera: $y = -2\lambda$.

La solución es $x = \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución Ejercicio 5

Sea A la matriz de coeficientes de las dos ecuaciones dadas. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, se tiene $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Las respuestas no son únicas; damos una posible en cada caso.

a) Para que sea compatible determinado necesitamos $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$. Añadimos $x + y + z = 6$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 3 = -7 \neq 0$$

Luego $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3 = n$.

b) Para que sea compatible indeterminado la tercera ecuación debe ser combinación lineal de las dos primeras. Sumándolas: $3x + y = 4$.

Entonces $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3$.

c) Para que sea incompatible tomamos los coeficientes de la suma pero un término independiente distinto: $3x + y = 5$.

Entonces $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A^*) = 3$, pues la ecuación añadida contradice la suma de las dos primeras ($3x + y = 4$).

Solución Ejercicio 6

Matriz de coeficientes A y matriz ampliada A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & m & 5 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, se tiene $\operatorname{rg}(A) = 2$ para todo m.

Calculamos el determinante de A^*:

$$|A^*| = 1(-5 - 0) - 1(10 - 0) + 3(2m + 1) = 6m - 12$$

- Si $m \neq 2$: $|A^*| \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A^*) = 3 \neq \operatorname{rg}(A)$. Sistema incompatible.
- Si $m = 2$: $\operatorname{rg}(A^*) = 2 = \operatorname{rg}(A) = n$. Sistema compatible determinado.

Resolvemos con las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Sumando: $3x = 3$, luego $x = 1$ e $y = 2$. Comprobación con la tercera: $1 + 2 \cdot 2 = 5$.

Solución Ejercicio 7

a) Matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

Hacemos ceros bajo el primer pivote con $F_2 \to F_2 - 2F_1$ y $F_3 \to F_3 - 3F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & 11 \end{array}\right)$$

Dividimos la segunda fila entre -3 ($F_2 \to F_2/(-3)$) y hacemos $F_3 \to F_3 + 7F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

El sistema escalonado es

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 6z = 18 \end{cases}$$

De la última: $z = 3$. De la segunda: $y = 1 - 3 = -2$. De la primera: $x = -2y - z = 4 - 3 = 1$.

La solución es $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$.

b) Matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Con $F_2 \to F_2 - 2F_1$ y $F_3 \to F_3 - F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Con $F_3 \to F_3 - F_2$ la última fila se anula:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hay dos ecuaciones independientes y tres incógnitas: sistema compatible indeterminado con un parámetro.

Llamamos $z = 3\lambda$. De la segunda ecuación: $3y = 5z = 15\lambda$, luego $y = 5\lambda$.

De la primera: $x = 1 + y - 2z = 1 + 5\lambda - 6\lambda = 1 - \lambda$.

La solución es $x = 1 - \lambda$, $y = 5\lambda$, $z = 3\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución Ejercicio 8

Sean x el precio de un libro, y el de un cuaderno y z el de un bolígrafo, en euros.

Compra de Ana: $3x + 2y + z = 37$.

Compra de Luis: $x + 4y + 3z = 25$.

Un libro cuesta lo mismo que tres cuadernos y un bolígrafo: $x = 3y + z$, es decir, $x - 3y - z = 0$.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 37 \\ x + 4y + 3z = 25 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Solución Ejercicio 9

Sean x la edad actual del abuelo, y la del hijo y z la del nieto.

Suma de las edades: $x + y + z = 120$.

El abuelo tiene la edad del hijo más la del nieto más 20: $x = y + z + 20$, es decir, $x - y - z = 20$.

Hace 5 años el hijo tenía siete veces la edad del nieto: $y - 5 = 7(z - 5)$, es decir, $y - 7z = -30$.

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - y - z = 20 \\ y - 7z = -30 \end{cases}$$