Examen de vectores

Ejercicio 1 (2 puntos) - Producto escalar y vectorial

Sean los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 3)$.

a) (0,5p) Calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) (0,75p) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) (0,75p) Calcula el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Producto mixto

Sean $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 3)$.

a) (0,75p) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

b) (0,5p) Calcula el volumen del tetraedro que determinan.

c) (0,75p) Halla el valor de m para que los vectores $(1, 2, 1)$, $(0, 1, -1)$ y $(m, 3, 2)$ sean coplanarios.

Ejercicio 3 (2 puntos) - Perpendicularidad

a) (0,75p) Halla k para que los vectores $(1, k, 2)$ y $(k, -3, 1)$ sean perpendiculares.

b) (1,25p) Halla un vector de módulo 2 perpendicular a $\vec{a} = (1, 1, 0)$ y a $\vec{b} = (0, 1, 1)$.

Ejercicio 4 (2 puntos) - Puntos y triángulo

Sean los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 3, 1)$.

a) (0,75p) Calcula el área del triángulo ABC.

b) (0,75p) Halla el punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo.

c) (0,5p) Calcula el baricentro del triángulo ABC.

Ejercicio 5 (2 puntos) - Módulos y ángulos

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores con $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ que forman un ángulo de $60°$.

a) (0,5p) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) (0,75p) Calcula $|\vec{u} + \vec{v}|$.

c) (0,75p) Calcula $|\vec{u} - \vec{v}|$.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 2 - 2 - 3 = -3$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{84}} \approx -0{,}3273$$

$$\alpha \approx 109{,}1^\circ$$

c) Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -5, -5)$$

$$\text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{25 + 25 + 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

Solución Ejercicio 2

a) El volumen es el valor absoluto del producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 2 - 0 - 0 - 0 = 5$$

$$V = |5| = 5\ \text{u}^3$$

b) El tetraedro es la sexta parte del paralelepípedo:

$$V = \frac{5}{6}\ \text{u}^3$$

c) Son coplanarios si su producto mixto es cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2m + 0 - m - (-3) - 0 = 5 - 3m$$

$$5 - 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

Solución Ejercicio 3

a) Son perpendiculares si su producto escalar es cero:

$$(1, k, 2) \cdot (k, -3, 1) = k - 3k + 2 = -2k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) Un vector perpendicular a ambos es su producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

Su módulo es $\sqrt{3}$, así que dividimos entre $\sqrt{3}$ y multiplicamos por 2:

$$\vec{w} = \frac{2}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

También vale el vector opuesto, $-\vec{w}$.

Solución Ejercicio 4

a) $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -2)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (5, 0, 5)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2$$

b) En el paralelogramo $ABCD$ se cumple $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, luego $D = C - \overrightarrow{AB}$:

$$D = (2, 3, 1) - (2, 1, -2) = (0, 2, 3)$$

c) El baricentro es la media de los vértices:

$$G = \left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{0+1+3}{3}, \frac{2+0+1}{3} \right) = \left(2, \frac{4}{3}, 1 \right)$$

Solución Ejercicio 5

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

b) Desarrollamos el cuadrado del módulo:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 9 + 12 + 16 = 37$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{37}$$

c) Igual, cambiando el signo del término central:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 9 - 12 + 16 = 13$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{13}$$