Examen de semejanza y trigonometría

Ejercicio 1 (1,5 puntos) - Teorema de Tales

a) (0,75p) Tres rectas paralelas cortan a dos rectas secantes r y s. Sobre r determinan los segmentos $AB = 4$ cm y $BC = 6$ cm, y sobre s los segmentos $A'B' = 5$ cm y $B'C'$. Calcula la longitud de $B'C'$.

b) (0,75p) A cierta hora del día, un palo vertical de $1{,}2$ m proyecta una sombra de $0{,}8$ m. En ese mismo momento, la sombra de un árbol mide 6 m. Calcula la altura del árbol.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Teorema del cateto y de la altura

a) (1p) En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa divide a esta en dos segmentos de 9 cm y 16 cm. Calcula la altura sobre la hipotenusa y la longitud de los dos catetos.

b) (1p) En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 6 cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 4 cm. Calcula la hipotenusa, la altura sobre la hipotenusa y el otro cateto.

Ejercicio 3 (1,5 puntos) - Razones de semejanza

Los lados de un triángulo ABC miden 6, 8 y 10 cm. Un triángulo $A'B'C'$ es semejante a él y su lado menor mide 9 cm.

a) (0,5p) Calcula la razón de semejanza y los otros dos lados de $A'B'C'$.

b) (0,5p) Calcula la razón entre los perímetros de $A'B'C'$ y ABC y comprueba el resultado con los perímetros.

c) (0,5p) Comprueba que ABC es rectángulo, calcula su área y, usando la razón de semejanza, el área de $A'B'C'$.

Ejercicio 4 (1,5 puntos) - Relaciones fundamentales

a) (0,75p) Sabiendo que $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ y que α está en el segundo cuadrante, calcula $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$.

b) (0,75p) Sabiendo que $\tan\beta = 3$ y que $180^\circ < \beta < 270^\circ$, calcula $\sin\beta$ y $\cos\beta$.

Ejercicio 5 (1 punto) - Reducción al primer cuadrante

Calcula el valor exacto, sin calculadora, de las siguientes expresiones:

a) (0,5p) $\sin 1020^\circ + \cos(-840^\circ)$

b) (0,5p) $\tan(-570^\circ)$

Ejercicio 6 (1 punto) - Identidades trigonométricas

a) (1p) Demuestra que $(1 - \cos^2 x)(1 + \tan^2 x) = \tan^2 x$.

Ejercicio 7 (1,5 puntos) - Altura de un edificio

Desde un punto del suelo se ve la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación de 60°. Si nos alejamos 20 m en línea recta, el ángulo de elevación pasa a ser de 30°.

a) (1p) Calcula la altura del edificio (da el valor exacto y una aproximación con dos decimales).

b) (0,5p) Calcula la distancia del primer punto al pie del edificio.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Por el teorema de Tales, los segmentos que determinan las paralelas son proporcionales:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{5}{B'C'} \Rightarrow B'C' = \frac{5 \cdot 6}{4} = 7{,}5 \text{ cm}$$

b) El palo y su sombra forman un triángulo en posición de Tales con el árbol y su sombra, así que las alturas son proporcionales a las sombras:

$$\frac{h}{6} = \frac{1{,}2}{0{,}8} \Rightarrow h = \frac{1{,}2 \cdot 6}{0{,}8} = 9 \text{ m}$$

Solución Ejercicio 2

a) Las proyecciones son $m = 9$ cm y $n = 16$ cm, así que la hipotenusa mide $a = 9 + 16 = 25$ cm.

1. Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow h = 12$ cm.
2. Teorema del cateto: $b^2 = a \cdot m = 25 \cdot 9 = 225 \Rightarrow b = 15$ cm.
3. Teorema del cateto: $c^2 = a \cdot n = 25 \cdot 16 = 400 \Rightarrow c = 20$ cm.

Comprobación con Pitágoras: $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$.

b) El cateto es $b = 6$ cm y su proyección $m = 4$ cm.

1. Teorema del cateto: $b^2 = a \cdot m \Rightarrow 36 = 4a \Rightarrow a = 9$ cm.
2. La otra proyección es $n = a - m = 9 - 4 = 5$ cm.
3. Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ cm.
4. Teorema del cateto: $c^2 = a \cdot n = 9 \cdot 5 = 45 \Rightarrow c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71$ cm.

Comprobación con Pitágoras: $6^2 + 45 = 81 = 9^2$.

Solución Ejercicio 3

a) El lado menor de ABC mide 6 cm y el de $A'B'C'$ mide 9 cm:

$$k = \frac{9}{6} = 1{,}5$$

Los otros lados de $A'B'C'$ miden $8 \cdot 1{,}5 = 12$ cm y $10 \cdot 1{,}5 = 15$ cm.

b) La razón entre los perímetros es igual a la razón de semejanza, $k = 1{,}5$. Comprobación:

$$\frac{P'}{P} = \frac{9 + 12 + 15}{6 + 8 + 10} = \frac{36}{24} = 1{,}5$$

c) Como $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$, por el recíproco del teorema de Pitágoras el triángulo es rectángulo, con catetos 6 y 8 cm:

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

La razón entre las áreas es $k^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$:

$$\text{Área}_{A'B'C'} = 24 \cdot 2{,}25 = 54 \text{ cm}^2$$

Comprobación: $\frac{9 \cdot 12}{2} = 54$ cm².

Solución Ejercicio 4

a) Por la relación fundamental:

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

En el segundo cuadrante el coseno es negativo, así que $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

b) Usamos la relación $1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$:

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

β está en el tercer cuadrante, donde el coseno es negativo: $\cos\beta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\sin\beta = \tan\beta \cdot \cos\beta = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

El seno es negativo, como corresponde al tercer cuadrante.

Solución Ejercicio 5

a) Quitamos vueltas completas: $1020^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 300^\circ$ y $-840^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 240^\circ$.

1. $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$ (cuarto cuadrante, seno negativo): $\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$ (tercer cuadrante, coseno negativo): $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

$$\sin 1020^\circ + \cos(-840^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

b) $-570^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ (segundo cuadrante, tangente negativa):

$$\tan(-570^\circ) = \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solución Ejercicio 6

a) Por la relación fundamental, $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, y además $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$(1 - \cos^2 x)(1 + \tan^2 x) = \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

Solución Ejercicio 7

a) Llamamos h a la altura del edificio y x a la distancia del primer punto al pie del edificio, así que el segundo punto está a $x + 20$ m.

1. Desde el primer punto: $\tan 60^\circ = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = \sqrt{3}\, x$.
2. Desde el segundo punto: $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{x + 20} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x + 20)$.

Igualamos ambas expresiones:

$$\sqrt{3}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 20) \Rightarrow 3x = x + 20 \Rightarrow x = 10$$

$$h = \sqrt{3} \cdot 10 = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \text{ m}$$

b) El primer punto está a $x = 10$ m del pie del edificio.