Examen de trigonometría

Ejercicio 1 (1 punto) - Grados y radianes

a) (0,5p) Expresa en radianes el ángulo de 150°.

b) (0,5p) Expresa en grados el ángulo de $\frac{4\pi}{3}$ rad.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Relaciones fundamentales

a) (1p) Sabiendo que $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ y que α está en el segundo cuadrante, calcula $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$.

b) (1p) Sabiendo que $\tan\beta = 2$ y que β está en el tercer cuadrante, calcula $\sin\beta$ y $\cos\beta$.

Ejercicio 3 (1,5 puntos) - Reducción al primer cuadrante

Calcula el valor exacto, sin calculadora, de las siguientes expresiones:

a) (0,5p) $\sin 150^\circ + \cos 300^\circ$

b) (0,5p) $\tan 225^\circ - \cos 120^\circ$

c) (0,5p) $\sin 330^\circ \cdot \cos 210^\circ$

Ejercicio 4 (1,5 puntos) - Resolución de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en A, la hipotenusa mide $a = 10$ cm y el ángulo $\widehat{B} = 35^\circ$.

a) (1p) Resuelve el triángulo (halla el ángulo y los lados que faltan).

b) (0,5p) Calcula su área.

Ejercicio 5 (1,5 puntos) - Identidades trigonométricas

a) (0,75p) Demuestra que $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

b) (0,75p) Simplifica la expresión $\dfrac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$.

Ejercicio 6 (1 punto) - La escalera

Una escalera de 5 m de longitud está apoyada en una pared vertical y forma con el suelo un ángulo de 70°.

a) (0,5p) ¿A qué altura de la pared llega la escalera?

b) (0,5p) ¿A qué distancia de la pared está el pie de la escalera?

Ejercicio 7 (1,5 puntos) - Doble observación

Desde un punto del suelo se ve la parte más alta de una torre con un ángulo de elevación de 30°. Si nos acercamos 20 m hacia la torre, el ángulo de elevación pasa a ser de 45°. Calcula la altura de la torre.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Como 180° equivalen a π rad:

$$150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

b)

$$\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$$

Solución Ejercicio 2

a) Usamos la relación fundamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

En el segundo cuadrante el coseno es negativo, así que $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

b) Usamos la relación $1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$:

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

En el tercer cuadrante el coseno es negativo, así que $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\sin \beta = \tan \beta \cdot \cos \beta = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

El seno también es negativo, como corresponde al tercer cuadrante.

Solución Ejercicio 3

a) $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ (segundo cuadrante) y $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$ (cuarto cuadrante):

$$\sin 150^\circ + \cos 300^\circ = \sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

b) $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ (tercer cuadrante, tangente positiva) y $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ (segundo cuadrante, coseno negativo):

$$\tan 225^\circ - \cos 120^\circ = \tan 45^\circ - (-\cos 60^\circ) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

c) $330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$ (cuarto cuadrante, seno negativo) y $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ (tercer cuadrante, coseno negativo):

$$\sin 330^\circ \cdot \cos 210^\circ = (-\sin 30^\circ) \cdot (-\cos 30^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Solución Ejercicio 4

a) Los ángulos de un triángulo suman 180°:

$$\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

El cateto b es opuesto a $\widehat{B}$ y el cateto c es contiguo a $\widehat{B}$:

$$b = a \cdot \sin 35^\circ = 10 \cdot 0{,}5736 \approx 5{,}74 \text{ cm}$$

$$c = a \cdot \cos 35^\circ = 10 \cdot 0{,}8192 \approx 8{,}19 \text{ cm}$$

b) Los catetos son la base y la altura:

$$\text{Área} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{5{,}736 \cdot 8{,}192}{2} \approx 23{,}49 \text{ cm}^2$$

Solución Ejercicio 5

a) Desarrollamos los cuadrados:

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x$$

Los dobles productos se anulan y queda:

$$2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$$

b) Por la relación fundamental, $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Solución Ejercicio 6

La escalera es la hipotenusa de un triángulo rectángulo formado con la pared y el suelo.

a) La altura h es el cateto opuesto al ángulo de 70°:

$$h = 5 \cdot \sin 70^\circ = 5 \cdot 0{,}9397 \approx 4{,}70 \text{ m}$$

b) La distancia d es el cateto contiguo:

$$d = 5 \cdot \cos 70^\circ = 5 \cdot 0{,}3420 \approx 1{,}71 \text{ m}$$

Solución Ejercicio 7

Llamamos h a la altura de la torre y x a la distancia desde el segundo punto de observación hasta el pie de la torre. Desde el primer punto, la distancia es $x + 20$.

1. Desde el punto cercano: $\tan 45^\circ = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x$.

2. Desde el punto lejano: $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{x+20} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+20)$.

Igualamos ambas expresiones:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+20) \Rightarrow 3x = \sqrt{3}\,x + 20\sqrt{3} \Rightarrow x(3-\sqrt{3}) = 20\sqrt{3}$$

$$x = \frac{20\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{60\sqrt{3}+60}{6} = 10(\sqrt{3}+1) \approx 27{,}32\ \text{m}$$

Como $h = x$, la torre mide aproximadamente $27{,}32$ m.