Examen de trigonometría

Ejercicio 1 (1 punto) - Grados y radianes

a) (0,5p) Expresa en radianes el ángulo de $225°$.

b) (0,5p) Expresa en grados el ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ rad.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Relaciones fundamentales

a) (1p) Sabiendo que $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ y que α está en el tercer cuadrante, calcula $\sin\alpha$ y $\tan\alpha$.

b) (1p) Sabiendo que $\tan\beta = -3$ y que β está en el cuarto cuadrante, calcula $\sin\beta$ y $\cos\beta$.

Ejercicio 3 (1,5 puntos) - Reducción al primer cuadrante

Calcula el valor exacto, sin calculadora, de las siguientes expresiones:

a) (0,5p) $\sin 120° + \cos 240°$

b) (0,5p) $\tan 315° + \sin 210°$

c) (0,5p) $\cos 150° \cdot \tan 120°$

Ejercicio 4 (1,5 puntos) - Resolución de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en A, la hipotenusa mide $a = 12$ cm y el ángulo $\widehat{C} = 40°$.

a) (1p) Resuelve el triángulo (halla el ángulo y los lados que faltan).

b) (0,5p) Calcula su área.

Ejercicio 5 (1,5 puntos) - Identidades trigonométricas

a) (0,75p) Demuestra que $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

b) (0,75p) Simplifica la expresión $\dfrac{\tan x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x}$.

Ejercicio 6 (1 punto) - La cometa

Una cometa está sujeta con un hilo tenso de 30 m de longitud que forma con el suelo un ángulo de $55°$.

a) (0,5p) ¿A qué altura está la cometa?

b) (0,5p) ¿A qué distancia horizontal de la persona que la sujeta se encuentra?

Ejercicio 7 (1,5 puntos) - El árbol al otro lado del río

Desde la orilla de un río se ve la copa de un árbol, situado justo en la orilla opuesta, con un ángulo de elevación de $60°$. Si nos alejamos 20 m del río en línea recta, el ángulo de

elevación pasa a ser de 30°. Calcula la altura del árbol y la anchura del río.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Como 180° equivalen a π rad:

$$225^\circ = 225 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

b)

$$\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 315^\circ$$

Solución Ejercicio 2

a) Usamos la relación fundamental $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{12}{13}$$

En el tercer cuadrante el seno es negativo, así que $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-12/13}{-5/13} = \frac{12}{5}$$

La tangente es positiva, como corresponde al tercer cuadrante.

b) Usamos la relación $1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$:

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

En el cuarto cuadrante el coseno es positivo, así que $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\sin\beta = \tan\beta \cdot \cos\beta = -3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

El seno es negativo, como corresponde al cuarto cuadrante.

Solución Ejercicio 3

a) $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ (segundo cuadrante, seno positivo) y $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$ (tercer cuadrante, coseno negativo):

$$\sin 120^\circ + \cos 240^\circ = \sin 60^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

b) $315^\circ = 360^\circ - 45^\circ$ (cuarto cuadrante, tangente negativa) y $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ (tercer cuadrante, seno negativo):

$$\tan 315^\circ + \sin 210^\circ = -\tan 45^\circ - \sin 30^\circ = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

c) $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ (segundo cuadrante, coseno negativo) y $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ (segundo cuadrante, tangente negativa):

$$\cos 150^\circ \cdot \tan 120^\circ = (-\cos 30^\circ) \cdot (-\tan 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

Solución Ejercicio 4

a) Los ángulos de un triángulo suman 180°:

$$\widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

El cateto c es opuesto a $\widehat{C}$ y el cateto b es contiguo a $\widehat{C}$:

$$c = a \cdot \sin 40^\circ = 12 \cdot 0{,}6428 \approx 7{,}71 \text{ cm}$$

$$b = a \cdot \cos 40^\circ = 12 \cdot 0{,}7660 \approx 9{,}19 \text{ cm}$$

b) Los catetos son la base y la altura:

$$\text{Área} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{9{,}193 \cdot 7{,}713}{2} \approx 35{,}45 \text{ cm}^2$$

Solución Ejercicio 5

a) Factorizamos como diferencia de cuadrados:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

Por la relación fundamental, el primer factor vale 1:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = 1 \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

b) Como $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, el numerador es $\tan x \cdot \cos x = \sin x$. Además, $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{\tan x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x}$$

Solución Ejercicio 6

El hilo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo formado con la vertical de la cometa y el suelo.

a) La altura h es el cateto opuesto al ángulo de 55°:

$$h = 30 \cdot \sin 55^\circ = 30 \cdot 0{,}8192 \approx 24{,}57 \text{ m}$$

b) La distancia horizontal d es el cateto contiguo:

$$d = 30 \cdot \cos 55^\circ = 30 \cdot 0{,}5736 \approx 17{,}21 \text{ m}$$

Solución Ejercicio 7

Llamamos h a la altura del árbol y x a la anchura del río. Desde el segundo punto, la distancia al árbol es $x + 20$.

1. Desde la orilla: $\tan 60^\circ = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = \sqrt{3}\,x$.
2. Desde el punto alejado: $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{x+20} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+20)$.

Igualamos ambas expresiones:

$$\sqrt{3}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+20) \Rightarrow 3x = x + 20 \Rightarrow x = 10 \text{ m}$$

$$h = \sqrt{3}\cdot 10 = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \text{ m}$$

El río mide 10 m de ancho y el árbol mide aproximadamente $17{,}32$ m.