Examen de trigonometría

Ejercicio 1 (1 punto) - Grados y radianes

a) (0,5p) Expresa en radianes el ángulo de -510° y da el ángulo equivalente comprendido entre 0 y 2π rad.

b) (0,5p) Expresa en grados el ángulo de $\dfrac{7\pi}{3}$ rad y reduce el resultado a un ángulo entre 0° y 360°.

Ejercicio 2 (1,5 puntos) - Relaciones fundamentales

a) (0,75p) Sabiendo que $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ y que $\tan\alpha > 0$, indica en qué cuadrante está α y calcula $\sin\alpha$ y $\tan\alpha$.

b) (0,75p) Sabiendo que $\tan\beta = -2\sqrt{2}$ y que $90^\circ < \beta < 180^\circ$, calcula $\sin\beta$ y $\cos\beta$.

Ejercicio 3 (1,5 puntos) - Reducción al primer cuadrante

Calcula el valor exacto, sin calculadora, de las siguientes expresiones:

a) (0,5p) $\sin 870^\circ + \cos(-690^\circ)$

b) (0,5p) $\tan(-1125^\circ)$

c) (0,5p) $\dfrac{\sin 300^\circ \cdot \cos 135^\circ}{\tan 210^\circ}$

Ejercicio 4 (3 puntos) - Identidades trigonométricas

a) (0,75p) Demuestra que $\dfrac{1}{1-\sin x} + \dfrac{1}{1+\sin x} = \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

b) (0,75p) Demuestra que $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

c) (0,75p) Demuestra que $\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

d) (0,75p) Simplifica la expresión $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x}$.

Ejercicio 5 (1 punto) - Usando identidades

Sabiendo que $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$:

a) (0,5p) Calcula $\sin x \cdot \cos x$.

b) (0,5p) Calcula $\sin^3 x + \cos^3 x$. Pista: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Ejercicio 6 (2 puntos) - La torre entre dos observadores

Dos personas, A y B, están separadas 100 m y entre ellas, en la misma línea recta, hay una torre. Desde A se ve la parte más alta de la torre con un ángulo de elevación de 45° y desde B con un ángulo de 30°.

a) (1,25p) Calcula la altura de la torre (da el valor exacto y una aproximación con dos decimales).

b) (0,75p) Calcula la distancia de cada persona al pie de la torre.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) Como 180° equivalen a π rad:

$$-510^\circ = -510 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{17\pi}{6} \text{ rad}$$

Sumamos vueltas completas ($2\pi = \frac{12\pi}{6}$) hasta caer entre 0 y 2π:

$$-\frac{17\pi}{6} + 2 \cdot \frac{12\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

b)

$$\frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 420^\circ$$

Quitamos una vuelta: $420^\circ - 360^\circ = 60^\circ$.

Solución Ejercicio 2

a) El coseno es negativo y la tangente positiva, así que α está en el tercer cuadrante. Por la relación fundamental:

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

En el tercer cuadrante el seno es negativo, así que $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{5}/3}{-2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) Usamos la relación $1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$:

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{1}{3}$$

β está en el segundo cuadrante, donde el coseno es negativo: $\cos\beta = -\frac{1}{3}$.

$$\sin\beta = \tan\beta \cdot \cos\beta = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

El seno es positivo, como corresponde al segundo cuadrante.

Solución Ejercicio 3

a) Quitamos vueltas completas: $870^\circ - 2\cdot 360^\circ = 150^\circ$ y $-690^\circ + 2\cdot 360^\circ = 30^\circ$.

$$\sin 870^\circ + \cos(-690^\circ) = \sin 150^\circ + \cos 30^\circ = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

b) $-1125^\circ + 4\cdot 360^\circ = 315^\circ = 360^\circ - 45^\circ$ (cuarto cuadrante, tangente negativa):

$$\tan(-1125^\circ) = \tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

c) $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$ (seno negativo), $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ (coseno negativo) y $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ (tangente positiva):

$$\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sin 300^\circ \cdot \cos 135^\circ}{\tan 210^\circ} = \frac{\sqrt{6}/4}{\sqrt{3}/3} = \frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Solución Ejercicio 4

a) Sumamos las fracciones con denominador común $(1-\sin x)(1+\sin x) = 1 - \sin^2 x$:

$$\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} = \frac{(1+\sin x) + (1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{1-\sin^2 x}$$

Por la relación fundamental, $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, así que el resultado es $\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

b) Multiplicamos numerador y denominador del lado izquierdo por $1 + \cos x$:

$$\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin x\,(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{\sin x\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

Como $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{\sin x\,(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

c) Escribimos la tangente como cociente:

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

d) Desarrollamos el cuadrado y usamos la relación fundamental:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 1 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = 2\sin x \cos x$$

$$\frac{2\sin x \cos x}{\tan x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x / \cos x} = 2\cos^2 x$$

Solución Ejercicio 5

a) Elevamos al cuadrado la igualdad dada:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1/4 - 1}{2} = -\frac{3}{8}$$

b) Aplicamos la pista con $a = \sin x$ y $b = \cos x$, y que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} = \frac{11}{16}$$

Solución Ejercicio 6

a) Llamamos h a la altura de la torre y x a la distancia de A al pie de la torre, así que la distancia de B es $100 - x$.

1. Desde A: $\tan 45^\circ = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x$.
2. Desde B: $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{100 - x} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(100 - x)$.

Igualamos ambas expresiones:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}(100 - x) \Rightarrow \sqrt{3}\,x = 100 - x \Rightarrow x(\sqrt{3} + 1) = 100$$

$$x = \frac{100}{\sqrt{3} + 1} = \frac{100(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{100(\sqrt{3} - 1)}{2} = 50(\sqrt{3} - 1)$$

Como $h = x$:

$$h = 50(\sqrt{3} - 1) \approx 36{,}60 \text{ m}$$

b) La persona A está a $x = 50(\sqrt{3} - 1) \approx 36{,}60$ m del pie de la torre y la persona B a:

$$100 - x = 100 - 50\sqrt{3} + 50 = 150 - 50\sqrt{3} \approx 63{,}40 \text{ m}$$