Examen de problemas de trigonometría

Ejercicio 1 (2 puntos) - Teorema del seno

En un triángulo ABC se conocen $A = 40^\circ$, $B = 75^\circ$ y $a = 12$ cm.

a) (0,5p) Calcula el ángulo C.

b) (1p) Calcula los lados b y c.

c) (0,5p) Calcula el diámetro y el radio de la circunferencia circunscrita.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Teorema del coseno

En un triángulo ABC se conocen $b = 7$ cm, $c = 9$ cm y $A = 60^\circ$.

a) (0,75p) Calcula el lado a.

b) (0,75p) Calcula los ángulos B y C.

c) (0,5p) Calcula el área del triángulo.

Ejercicio 3 (2 puntos) - Triángulo de lados conocidos

Un triángulo tiene lados $a = 13$ cm, $b = 14$ cm y $c = 15$ cm.

a) (1p) Calcula sus tres ángulos con el teorema del coseno.

b) (0,5p) Calcula su área con la fórmula de Herón.

c) (0,5p) Calcula el radio de la circunferencia circunscrita con la fórmula $S = \dfrac{a\,b\,c}{4R}$.

Ejercicio 4 (2 puntos) - Circunferencia circunscrita

En un triángulo ABC se conocen $a = 10$ cm, $A = 30^\circ$ y $B = 45^\circ$.

a) (0,5p) Calcula el diámetro y el radio de la circunferencia circunscrita.

b) (0,75p) Calcula los lados b y c.

c) (0,75p) Calcula el área del triángulo usando $S = \dfrac{a\,b\,c}{4R}$.

Ejercicio 5 (2 puntos) - Pieza triangular en un disco

Un artesano quiere cortar una pieza triangular de lados 9 cm, 10 cm y 11 cm de un disco de madera. Quiere usar el disco más pequeño posible, es decir, el que tiene la circunferencia del triángulo como borde.

a) (0,75p) Calcula el área de la pieza triangular.

b) (0,75p) Calcula el radio del disco necesario.

c) (0,5p) Calcula el área de madera que sobra al cortar la pieza.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) La suma de los ángulos de un triángulo es 180°:

$$C = 180^\circ - 40^\circ - 75^\circ = 65^\circ$$

b) Por el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{12}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{0{,}6428} \approx 18{,}67$$

$$b = 18{,}67 \cdot \sin 75^\circ \approx 18{,}67 \cdot 0{,}9659 \approx 18{,}03 \text{ cm}$$

$$c = 18{,}67 \cdot \sin 65^\circ \approx 18{,}67 \cdot 0{,}9063 \approx 16{,}92 \text{ cm}$$

c) El cociente del teorema del seno es el diámetro de la circunferencia circunscrita:

$$2R = \frac{a}{\sin A} \approx 18{,}67 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad R \approx 9{,}33 \text{ cm}$$

Solución Ejercicio 2

a) Por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ = 130 - 63 = 67$$

$$a = \sqrt{67} \approx 8{,}19 \text{ cm}$$

b) Despejamos el coseno de B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{67 + 81 - 49}{2 \cdot 8{,}19 \cdot 9} = \frac{99}{147{,}34} \approx 0{,}6719 \quad \Rightarrow \quad B \approx 47{,}78^\circ$$

Entonces:

$$C = 180^\circ - 60^\circ - 47{,}78^\circ = 72{,}22^\circ$$

c) Con dos lados y el ángulo que forman:

$$S = \frac{1}{2}\, b\, c\, \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin 60^\circ \approx 27{,}28 \text{ cm}^2$$

Solución Ejercicio 3

a) Por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{196 + 225 - 169}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{252}{420} = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad A \approx 53{,}13^\circ$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{169 + 225 - 196}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{198}{390} \approx 0{,}5077 \quad \Rightarrow \quad B \approx 59{,}49^\circ$$

$$C = 180^\circ - 53{,}13^\circ - 59{,}49^\circ = 67{,}38^\circ$$

b) El semiperímetro es $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ cm.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2$$

c) Despejamos R de $S = \dfrac{abc}{4R}$:

$$R = \frac{a\,b\,c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{2730}{336} = 8{,}125 \text{ cm}$$

Solución Ejercicio 4

a) Por el teorema del seno:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sin} A} = \frac{10}{\operatorname{sin} 30^\circ} = \frac{10}{0{,}5} = 20 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad R = 10 \text{ cm}$$

b) Como $2R = 20$, cada lado es 20 por el seno de su ángulo opuesto. Primero, $C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

$$b = 2R \operatorname{sin} B = 20 \cdot \operatorname{sin} 45^\circ = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}$$

$$c = 2R \operatorname{sin} C = 20 \cdot \operatorname{sin} 105^\circ \approx 19{,}32 \text{ cm}$$

c) Aplicamos la fórmula del área con el radio:

$$S = \frac{a\,b\,c}{4R} = \frac{10 \cdot 14{,}14 \cdot 19{,}32}{40} \approx 68{,}30 \text{ cm}^2$$

Solución Ejercicio 5

a) El semiperímetro es $s = \dfrac{9+10+11}{2} = 15$ cm.

$$S = \sqrt{15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2} \approx 42{,}43 \text{ cm}^2$$

b) El radio de la circunferencia circunscrita es:

$$R = \frac{a\,b\,c}{4S} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{4 \cdot 42{,}43} = \frac{990}{169{,}71} \approx 5{,}83 \text{ cm}$$

c) Área del disco menos área de la pieza:

$$\pi R^2 - S \approx \pi \cdot 5{,}83^2 - 42{,}43 \approx 106{,}91 - 42{,}43 \approx 64{,}48 \text{ cm}^2$$