Examen de problemas de trigonometría

Ejercicio 1 (2 puntos) - Barco visto desde la costa

Dos observadores están en los puntos A y B de una playa recta, separados 250 m. Ven un barco en el punto C. Desde A el ángulo entre la dirección a B y la dirección al barco es de 62°. Desde B ese ángulo entre la dirección a A y la dirección al barco es de 71°.

a) (0,5p) Calcula el ángulo del triángulo ABC en el vértice C.

b) (0,75p) Calcula la distancia del barco a cada observador.

c) (0,75p) Calcula la distancia mínima del barco a la playa.

Ejercicio 2 (2 puntos) - Dos barcos que salen del mismo puerto

Dos barcos salen a la vez de un mismo puerto con rumbos que forman un ángulo de 80°. Uno navega a 24 km/h y el otro a 18 km/h, ambos en línea recta y a velocidad constante.

a) (0,75p) ¿Qué distancia los separa al cabo de $2{,}5$ horas?

b) (1,25p) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar desde que salen para que estén a 100 km el uno del otro? Da el resultado en horas y minutos.

Ejercicio 3 (2 puntos) - Parque triangular

Un parque tiene forma de triángulo con lados de 17 m, 25 m y 26 m. Se quiere colocar una farola que esté a la misma distancia de las tres esquinas.

a) (0,75p) Calcula el área del parque.

b) (0,75p) Calcula la distancia de la farola a cada esquina.

c) (0,5p) Calcula el mayor ángulo del parque y comprueba que es coherente con el resultado del apartado anterior.

Ejercicio 4 (2 puntos) - Triángulo inscrito en una circunferencia

Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de 15 cm de radio. El lado BC mide 18 cm y el ángulo en B es de 70°.

a) (0,5p) Calcula el ángulo en A.

b) (0,75p) Calcula los lados AC y AB.

c) (0,75p) Calcula el área del triángulo de dos formas distintas y comprueba que coinciden.

Ejercicio 5 (2 puntos) - Dos triángulos posibles

Un triángulo ABC cumple que $a = 10$ cm, $b = 14$ cm y $A = 30^\circ$.

a) (0,75p) Demuestra que hay dos triángulos que cumplen estas condiciones y calcula el ángulo B de cada uno.

b) (0,5p) Calcula el lado c en cada caso.

c) (0,75p) Calcula el área de cada triángulo.

Resolución

Solución Ejercicio 1

a) $C = 180^\circ - 62^\circ - 71^\circ = 47^\circ$

b) Por el teorema del seno, con $AB = 250$ opuesto a C:

$$\frac{AB}{\operatorname{sin} C} = \frac{250}{\operatorname{sin} 47^\circ} \approx 341{,}8$$

$$AC = 341{,}8 \cdot \operatorname{sin} 71^\circ \approx 323{,}21 \text{ m}$$

$$BC = 341{,}8 \cdot \operatorname{sin} 62^\circ \approx 301{,}82 \text{ m}$$

c) La distancia mínima es la altura desde C sobre AB:

$$h = AC \cdot \operatorname{sin} 62^\circ \approx 323{,}21 \cdot 0{,}8829 \approx 285{,}38 \text{ m}$$

Comprobación con el otro lado: $BC \cdot \operatorname{sin} 71^\circ \approx 301{,}82 \cdot 0{,}9455 \approx 285{,}38$ m.

Solución Ejercicio 2

a) En $2{,}5$ horas recorren $24 \cdot 2{,}5 = 60$ km y $18 \cdot 2{,}5 = 45$ km. Por el teorema del coseno:

$$d^2 = 60^2 + 45^2 - 2 \cdot 60 \cdot 45 \cdot \cos 80^\circ \approx 5625 - 937{,}7 = 4687{,}3$$

$$d \approx 68{,}46 \text{ km}$$

b) Después de t horas los barcos están a $24t$ y $18t$ km del puerto:

$$d^2 = (24t)^2 + (18t)^2 - 2 \cdot 24t \cdot 18t \cdot \cos 80^\circ = t^2\left(900 - 864\cos 80^\circ\right) \approx 749{,}9\, t^2$$

Imponemos $d = 100$:

$$749{,}9\, t^2 = 10000 \quad \Rightarrow \quad t \approx 3{,}65 \text{ h}$$

$$0{,}65 \cdot 60 \approx 39 \text{ min} \quad \Rightarrow \quad t \approx 3 \text{ h } 39 \text{ min}$$

Solución Ejercicio 3

a) El semiperímetro es $s = \dfrac{17 + 25 + 26}{2} = 34$ m. Por la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{34 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 8} = \sqrt{41616} = 204 \text{ m}^2$$

b) La farola va en el circuncentro, así que la distancia pedida es el radio de la circunferencia circunscrita:

$$R = \frac{a\,b\,c}{4S} = \frac{17 \cdot 25 \cdot 26}{4 \cdot 204} = \frac{11050}{816} \approx 13{,}54 \text{ m}$$

c) El mayor ángulo es el opuesto al lado mayor, de 26 m. Por el teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{17^2 + 25^2 - 26^2}{2 \cdot 17 \cdot 25} = \frac{238}{850} = 0{,}28 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 73{,}74^\circ$$

Comprobación con el diámetro de la circunferencia circunscrita:

$$\sin\alpha = \frac{26}{2R} = \frac{26}{27{,}08} \approx 0{,}96 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 73{,}74^\circ$$

Solución Ejercicio 4

a) El lado $BC = a$ es opuesto a A y $2R = 30$ cm:

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{18}{30} = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad A \approx 36{,}87^\circ$$

Como el triángulo es acutángulo, se descarta $180^\circ - 36{,}87^\circ = 143{,}13^\circ$.

b) Primero, $C = 180^\circ - 36{,}87^\circ - 70^\circ = 73{,}13^\circ$.

$$AC = b = 2R\sin B = 30 \cdot \sin 70^\circ \approx 28{,}19 \text{ cm}$$

$$AB = c = 2R\sin C = 30 \cdot \sin 73{,}13^\circ \approx 28{,}71 \text{ cm}$$

c) Con dos lados y el ángulo que forman, tomando a, c y B:

$$S = \frac{1}{2}\,a\,c\,\sin B = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 28{,}71 \cdot \sin 70^\circ \approx 242{,}80 \text{ cm}^2$$

Con los lados y el radio:

$$S = \frac{a\,b\,c}{4R} = \frac{18 \cdot 28{,}19 \cdot 28{,}71}{60} \approx 242{,}80 \text{ cm}^2$$

Las dos formas coinciden.

Solución Ejercicio 5

a) Por el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{14 \cdot 0{,}5}{10} = 0{,}7$$

Como $0{,}7 < 1$, hay dos ángulos posibles:

$$B_1 \approx 44{,}43^\circ \qquad B_2 = 180^\circ - 44{,}43^\circ = 135{,}57^\circ$$

Los dos valen porque $A + B_2 = 30^\circ + 135{,}57^\circ = 165{,}57^\circ < 180^\circ$. Hay dos triángulos.

b) Calculamos el tercer ángulo y el lado c en cada caso:

$$C_1 = 180^\circ - 30^\circ - 44{,}43^\circ = 105{,}57^\circ \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{10 \cdot \sin 105{,}57^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 19{,}27 \text{ cm}$$

$$C_2 = 180^\circ - 30^\circ - 135{,}57^\circ = 14{,}43^\circ \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{10 \cdot \sin 14{,}43^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 4{,}98 \text{ cm}$$

c) Con dos lados y el ángulo que forman, $S = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin C$:

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 14 \cdot \sin 105{,}57^\circ \approx 67{,}43\ \text{cm}^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 14 \cdot \sin 14{,}43^\circ \approx 17{,}44\ \text{cm}^2$$