ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

ARITMÉTICA

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Jerarquía y reglas de los signos **3**

Jerarquía de operaciones 3
Regla de los signos 6
Ejemplo combinado final 8

2. Propiedades de las operaciones **9**

Propiedades estructurales 9
Elementos especiales 11

3. Divisibilidad: m.c.d. y m.c.m. **13**

Múltiplos y divisores 13
Criterios de divisibilidad 14
Números primos y factorización 15
Máximo común divisor (m.c.d.) 17
Mínimo común múltiplo (m.c.m.) 18
Problemas de m.c.d. y m.c.m. 19

Resumen **21**

Índice de conceptos **23**

TEMA 1

JERARQUÍA Y REGLAS DE LOS SIGNOS

Orden de prioridad en operaciones combinadas y leyes fundamentales para números positivos y negativos.

Jerarquía de operaciones

DEFINICIÓN

Operación combinada

Una **operación combinada** es una expresión numérica en la que aparecen varias operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potencias, raíces) y, a veces, signos de agrupación. Para que tenga **un único valor**, todo el mundo debe resolverla en el mismo orden: es la **jerarquía de operaciones**, una convención que se enuncia en los cuatro niveles siguientes (de mayor a menor prioridad).

$$\text{paréntesis} \;>\; \text{potencias y raíces} \;>\; \cdot \text{ y } : \;>\; + \text{ y } -$$

EJEMPLO:

$2+3\cdot 4$ podría leerse como $(2+3)\cdot 4=20$ o como $2+(3\cdot 4)=14$. La jerarquía decide: primero la multiplicación, luego la suma, así que el valor es 14.

PROCEDIMIENTO

1. Paréntesis y agrupación

Se resuelven primero las operaciones contenidas en los signos de agrupación (paréntesis (), corchetes [] y llaves {}), de los más internos a los más externos. Si una fracción tiene operaciones en el numerador o en el denominador, cada uno se calcula como si estuviera entre paréntesis.

$$() \to [] \to \{\}$$

EJEMPLO:

$$5 \cdot (2+3) = 5 \cdot 5 = 25$$
$$[\,3 + (8-2)\,] \cdot 2 = [\,3+6\,] \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$$

PROCEDIMIENTO

2. Exponentes y raíces

Una vez resueltos los signos de agrupación, se calculan las potencias y las raíces. La potencia a^n (con n natural) es el producto de n factores iguales a a; la raíz $\sqrt[n]{a}$ es la operación inversa.

$$a^n \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a}$$

EJEMPLO:

$$2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$$
$$\sqrt{16} + 2^3 = 4 + 8 = 12$$

PROCEDIMIENTO

3. Multiplicación y división

Tienen **la misma prioridad**: se resuelven en el orden en que aparecen, de **izquierda a derecha**. Por ejemplo, $12:2\cdot 3$ vale $6\cdot 3=18$ y no $12:6=2$.

$$a\cdot b \quad \text{y} \quad a:b$$

EJEMPLO:

$$12:2\cdot 3=6\cdot 3=18$$
$$4\cdot 6:3=24:3=8$$

PROCEDIMIENTO

4. Suma y resta

Es el último nivel. Tienen la misma prioridad y se resuelven de **izquierda a derecha**. Error frecuente: en $2+3\cdot 4$ primero se multiplica, de modo que el resultado es $2+12=14$ y no $5\cdot 4=20$.

$$a+b \quad \text{y} \quad a-b$$

EJEMPLO:

$$10-4+2=6+2=8$$
$$2+3\cdot 4=2+12=14$$

Regla de los signos

DEFINICIÓN

Números enteros, opuesto y valor absoluto

Los **números enteros** son los naturales, sus opuestos (negativos) y el cero. El **opuesto** de a es el número $-a$ que cumple $a+(-a)=0$. El **valor absoluto** de a, que se escribe $|a|$, es la distancia de a al 0 en la recta numérica, por lo que nunca es negativo.

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} \qquad |a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geq 0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases}$$

EJEMPLO:

El opuesto de 5 es -5 y el opuesto de -3 es 3.
$|4|=4$ y $|-7|=7$.

PROPIEDAD

Multiplicación y división

Signos **iguales** dan resultado positivo $(+)$; signos **distintos** dan resultado negativo $(-)$. La división sigue la misma regla que la multiplicación (siempre que el divisor no sea 0).

$$(+)\cdot(+)=+ \qquad (-)\cdot(-)=+ \qquad (+)\cdot(-)=- \qquad (-)\cdot(+)=-$$

EJEMPLO:

$$(-4)\cdot(-3)=12 \qquad (-10):2=-5 \qquad 6:(-3)=-2$$

PROPIEDAD

Suma y resta de números enteros

Si los dos números tienen el **mismo signo**, se suman sus valores absolutos y se deja ese signo. Si tienen **distinto signo**, se restan sus valores absolutos (el mayor menos el menor) y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

$$(-a)+(-b)=-(a+b) \qquad a+(-b)=\pm(|a|-|b|) \text{ (signo del de mayor valor absoluto)}$$

EJEMPLO:

$$-5-3=-8 \qquad -5+3=-2 \qquad 5-8=-3$$

PROPIEDAD

Doble signo negativo

Restar un número equivale a **sumar su opuesto**: $a-b=a+(-b)$. Como el opuesto de $-b$ es b, restar un número negativo equivale a **sumar** su valor absoluto.

$$a-(-b)=a+b$$

EJEMPLO:

$$7-(-2)=7+2=9$$

PROPIEDAD

Potencias de números negativos

Si el signo menos está **dentro** del paréntesis, la base es $-a$ y también se eleva; si está **fuera**, la potencia solo afecta a a y el signo se aplica después. Con exponente **par**, $(-a)^n$ es positivo; con exponente **impar**, negativo (cada pareja de factores negativos da $+$).

$$(-a)^n \neq -a^n \qquad (-a)^{\text{par}}>0 \qquad (-a)^{\text{impar}}<0 \quad (a>0)$$

EJEMPLO:

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9 \qquad -3^2=-(3\cdot 3)=-9$$

Ejemplo combinado final

PROCEDIMIENTO

Resolución paso a paso

Se aplica la jerarquía de operaciones: 1°, dentro del corchete, la potencia $2^3 = 8$ y la división $-6 : 2 = -3$; 2°, la suma dentro del corchete; 3°, la multiplicación, aplicando la regla de los signos; 4°, la resta final (restar un negativo es sumar).

$$7 - [2^3 + (-6 : 2)] \cdot (-2)$$

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} & 7 - [2^3 + (-6 : 2)] \cdot (-2) \\ & = 7 - [8 + (-3)] \cdot (-2) \\ & = 7 - 5 \cdot (-2) \\ & = 7 - (-10) = 7 + 10 = 17 \end{aligned}$$

TEMA 2

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Explora las reglas fundamentales de la aritmética: propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, elementos neutros, inversos y el elemento absorbente.

Propiedades estructurales

DEFINICIÓN

Propiedad de una operación

Una **operación** entre dos números asigna a cada pareja (a, b) un único número, como en $a + b$ o $a \cdot b$. Una **propiedad** de la operación es una igualdad que se cumple para **cualesquiera** números a, b, c (no solo para algunos). Para demostrar que una propiedad **no** se cumple basta un solo **contraejemplo**.

propiedad: $\forall\, a, b, c$ se cumple la igualdad

EJEMPLO:

$a + b = b + a$ es una propiedad de la suma. Sin embargo, $8 - 3 = 5$ y $3 - 8 = -5$ es un contraejemplo: la resta no cumple $a - b = b - a$.

PROPIEDAD

Propiedad conmutativa

El **orden** de los dos números no altera el resultado. Se cumple en la suma y en la multiplicación, pero **no** en la resta ni en la división (contraejemplos: $8-3 \neq 3-8$ y $8:4 \neq 4:8$).

$$a+b=b+a \quad / \quad a \cdot b = b \cdot a$$

EJEMPLO:

$$5+3=3+5=8 \quad / \quad 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 8$$

PROPIEDAD

Propiedad asociativa

La forma en que se **agrupan** tres sumandos o tres factores no cambia el resultado, por eso se puede escribir $a+b+c$ sin paréntesis. No se cumple en la resta: $(8-4)-2=2$ pero $8-(4-2)=6$.

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad / \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

EJEMPLO:

$$(2+3)+4=5+4=9 \quad / \quad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

PROPIEDAD

Propiedad distributiva

La multiplicación es **distributiva respecto de la suma**: multiplicar un número por una suma es igual a sumar los productos de ese número por cada sumando. Leída de derecha a izquierda, permite **sacar factor común**.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

EJEMPLO:

$$3 \cdot (4+5) = (3 \cdot 4) + (3 \cdot 5) = 12 + 15 = 27$$

PROCEDIMIENTO

Sacar factor común

Si todos los sumandos tienen un factor repetido, se escribe una sola vez fuera de un paréntesis que contiene lo que queda de cada sumando. Es la propiedad distributiva leída al revés, facilita muchos cálculos mentales y es la base de la factorización en álgebra.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

EJEMPLO:

$$7 \cdot 13 + 7 \cdot 7 = 7 \cdot (13 + 7) = 7 \cdot 20 = 140$$

Elementos especiales

DEFINICIÓN

Elemento neutro (identidad)

Un **elemento neutro** de una operación es un número que, operado con cualquier otro, deja a este último igual. El neutro de la suma es el 0 y el de la multiplicación es el 1.

$$a + 0 = a \ \ / \ \ a \cdot 1 = a$$

EJEMPLO:

$$12 + 0 = 12 \ \ / \ \ 15 \cdot 1 = 15$$

DEFINICIÓN

Elemento inverso (simétrico)

El **opuesto** de a es $-a$ (inverso para la suma) y el **inverso** de $a \neq 0$ es $\frac{1}{a}$ (inverso para el producto). Al operar un número con su opuesto, o con su inverso, se obtiene el elemento neutro de esa operación. El 0 no tiene inverso, porque ningún número multiplicado por 0 da 1.

$$a + (-a) = 0 \qquad a \cdot \frac{1}{a} = 1 \; (a \neq 0)$$

EJEMPLO:

$$7 + (-7) = 0 \qquad 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

DEFINICIÓN

Elemento absorbente

Un **elemento absorbente** de una operación es un número que, operado con cualquier otro, da siempre ese mismo número. En la multiplicación es el 0. La suma no tiene elemento absorbente.

$$a \cdot 0 = 0$$

EJEMPLO:

$$1234 \cdot 0 = 0$$

TEMA 3

DIVISIBILIDAD: M.C.D. Y M.C.M.

Múltiplos y divisores, criterios de divisibilidad, números primos, descomposición en factores primos y cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, con problemas resueltos.

Múltiplos y divisores

DEFINICIÓN

Múltiplo de un número

Un número b es **múltiplo** de a cuando b se obtiene multiplicando a por un número natural. Todo número tiene **infinitos** múltiplos: se obtienen multiplicándolo por $1, 2, 3, \ldots$

$$b \text{ es múltiplo de } a \iff b = a \cdot k, \text{ con } k \text{ natural}$$

EJEMPLO:

Los múltiplos de 4 son $4, 8, 12, 16, 20, \ldots$

DEFINICIÓN

Divisor de un número

Un número a es **divisor** de b cuando la división $b:a$ es **exacta** (resto 0). Entonces b es múltiplo de a: 3 es divisor de 12 y 12 es múltiplo de 3. Un número tiene una cantidad **finita** de divisores; el 1 y el propio número siempre lo son.

a es divisor de $b \iff b:a$ es una división exacta

EJEMPLO:

Los divisores de 12 son $1, 2, 3, 4, 6$ y 12

Criterios de divisibilidad

PROPIEDAD

Divisible entre 2, 5 y 10

Basta con mirar la **última cifra**.

$2:$ acaba en $0, 2, 4, 6, 8$ $\quad 5:$ acaba en 0 o 5 $\quad 10:$ acaba en 0

EJEMPLO:

348 es divisible entre 2; 735 es divisible entre 5; 920 es divisible entre 2, 5 y 10

PROPIEDAD

Divisible entre 3 y 9

Se suman todas las cifras y se comprueba el resultado.

La suma de sus cifras es múltiplo de 3 (o de 9)

EJEMPLO:

4152: $4+1+5+2=12$, que es múltiplo de 3 pero no de 9. Por tanto, 4152 es divisible entre 3 pero no entre 9.

PROPIEDAD

Divisible entre 11

Se cuentan las posiciones de izquierda a derecha.

(suma de cifras en posición impar) $-$ (suma de cifras en posición par) $=0$ o múltiplo de 11

EJEMPLO:

9372: $(9+7)-(3+2)=16-5=11$, así que 9372 es divisible entre 11

Números primos y factorización

DEFINICIÓN

Número primo y número compuesto

Un número natural mayor que 1 es **primo** si tiene exactamente dos divisores: el 1 y él mismo. Si tiene más de dos divisores, es **compuesto**. El 1 no es ni primo ni compuesto (solo tiene un divisor).

p primo $\iff$ divisores$(p)=\{1,p\}$ Primos: $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,\ldots$

EJEMPLO:

13 es primo (solo se divide entre 1 y 13). 14 es compuesto: $14=2\cdot 7$

TEOREMA

Teorema fundamental de la aritmética

Todo número natural mayor que 1 se puede escribir como producto de números primos, y esa descomposición es **única** salvo el orden de los factores. Esto justifica que se pueda hablar de «la» descomposición en factores primos de un número.

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \qquad (p_i \text{ primos distintos},\ a_i \geq 1)$$

EJEMPLO:

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y no existe ninguna otra forma de escribir 60 como producto de primos.

PROCEDIMIENTO

Descomposición en factores primos

Procedimiento. Se divide el número entre el menor primo posible (2, luego 3, luego 5…), usando los criterios de divisibilidad, y se repite con cada cociente hasta llegar a 1. Los primos usados, con su número de repeticiones como exponente, forman la descomposición.

$$n = p_1^a \cdot p_2^b \cdot p_3^c \cdots$$

EJEMPLO:

$180 : 2 = 90$
$90 : 2 = 45$
$45 : 3 = 15$
$15 : 3 = 5$
$5 : 5 = 1$
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Máximo común divisor (m.c.d.)

DEFINICIÓN

Máximo común divisor

El **máximo común divisor** de varios números es el mayor número natural que divide a todos ellos. Dos números cuyo m.c.d. es 1 se llaman **primos entre sí**.

$\text{m.c.d.}(a, b) = \text{el mayor de los divisores comunes}$

EJEMPLO:

Divisores de 12: $1, 2, 3, 4, 6, 12$
Divisores de 18: $1, 2, 3, 6, 9, 18$
$\text{m.c.d.}(12, 18) = 6$

PROCEDIMIENTO

Cálculo con factores primos

Se descomponen los números y se toman solo los primos que aparecen en **todas** las descomposiciones, cada uno con su **menor** exponente.

Factores comunes elevados al menor exponente

EJEMPLO:

$12 = 2^2 \cdot 3$ y $18 = 2 \cdot 3^2$
$\text{m.c.d.}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

DEFINICIÓN

Mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el menor número natural distinto de 0 que es múltiplo de todos ellos.

$\text{m.c.m.}(a, b) = \text{el menor de los múltiplos comunes (distinto de 0)}$

EJEMPLO:

Múltiplos de 12: $12, 24, 36, 48, \ldots$
Múltiplos de 18: $18, 36, 54, \ldots$
$\text{m.c.m.}(12, 18) = 36$

PROCEDIMIENTO

Cálculo con factores primos

Se toman **todos** los primos que aparecen en alguna descomposición, cada uno con su **mayor** exponente.

Factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente

EJEMPLO:

$12 = 2^2 \cdot 3$ y $18 = 2 \cdot 3^2$
$\text{m.c.m.}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

PROPIEDAD

Relación entre m.c.d. y m.c.m.

Para **dos** números, el producto de los números es igual al producto de su m.c.d. y su m.c.m. (no es cierto para tres o más). Sirve para comprobar los cálculos o para obtener uno de los dos conocido el otro.

$$a \cdot b = \text{m.c.d.}(a,b) \cdot \text{m.c.m.}(a,b)$$

EJEMPLO:

$12 \cdot 18 = 216$ y $6 \cdot 36 = 216$

Si $\text{m.c.d.}(a,20) = 4$ y $\text{m.c.m.}(a,20) = 60$, entonces $a = \dfrac{4 \cdot 60}{20} = 12$.

Problemas de m.c.d. y m.c.m.

PROCEDIMIENTO

¿Cuándo uso cada uno?

El **m.c.d.** aparece al **dividir** o repartir: trozos, cajas o grupos iguales y del mayor tamaño posible. El **m.c.m.** aparece cuando algo se **repite** y buscamos cuándo vuelve a coincidir: horarios, luces, vueltas.

repartir en partes iguales lo más grandes posible $\rightarrow$ m.c.d. volver a coincidir $\rightarrow$ m.c.m.

PROCEDIMIENTO

Problema de m.c.d.

El tamaño del trozo tiene que dividir exactamente a las dos longitudes, y queremos el mayor posible.

$$\text{m.c.d.}(120, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

EJEMPLO:

Un carpintero quiere cortar dos listones de 120 cm y 84 cm en trozos iguales, lo más largos posible y sin que sobre madera.
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
Cada trozo mide 12 cm y salen $120 : 12 + 84 : 12 = 10 + 7 = 17$ trozos.

PROCEDIMIENTO

Problema de m.c.m.

El momento en que coinciden tiene que ser múltiplo de los dos tiempos, y buscamos el primero.

$$\text{m.c.m.}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

EJEMPLO:

Dos autobuses salen juntos a las 8:00 h. Uno sale cada 12 minutos y el otro cada 18 minutos.
Vuelven a coincidir a los 36 minutos, es decir, a las 8:36 h.

RESUMEN

1. Jerarquía y reglas de los signos

Orden de las operaciones

De izquierda a derecha dentro de cada nivel.

$$\text{paréntesis} > \text{potencias y raíces} > \cdot \text{ y } : > + \text{ y } -$$

Paréntesis

Se resuelven de dentro hacia fuera.

$$() \to [] \to \{\}$$

Signos al multiplicar y dividir

Signos iguales dan $+$; signos distintos dan $-$.

$$(+)\cdot(+) = + \quad (-)\cdot(-) = + \quad (+)\cdot(-) = - \quad (-)\cdot(+) = -$$

Signos al sumar y restar

Mismo signo: se suman y se deja el signo. Distinto signo: se restan y se deja el signo del de mayor valor absoluto.

$$a - (-b) = a + b$$

Potencias de negativos

Con exponente par sale positivo; con impar, negativo. El paréntesis importa.

$$(-a)^n \neq -a^n \qquad (-2)^4 = 16 \qquad -2^4 = -16$$

2. Propiedades de las operaciones

Conmutativa

El orden no cambia el resultado (no vale para la resta ni la división).

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Asociativa

Se pueden agrupar como se quiera.

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Distributiva y factor común

Leída al revés, es sacar factor común.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Elementos neutros

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

Elementos inversos y absorbente

$$a + (-a) = 0 \qquad a \cdot \frac{1}{a} = 1 \ (a \neq 0) \qquad a \cdot 0 = 0$$

3. Divisibilidad: m.c.d. y m.c.m.

Múltiplo y divisor

$$b = a \cdot k \iff b \text{ es múltiplo de } a \iff a \text{ es divisor de } b$$

Criterios de divisibilidad

- 2: acaba en cifra par. • 5: acaba en 0 o 5. • 10: acaba en 0.
- 3 y 9: la suma de cifras es múltiplo de 3 (o de 9).
- 11: (cifras en posición impar) - (cifras en posición par) es 0 o múltiplo de 11.

Primos y factorización

Un primo solo tiene los divisores 1 y él mismo. Todo número se descompone de forma única en factores primos.

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

m.c.d.

Factores **comunes** elevados al **menor** exponente. Se usa para repartir en partes iguales lo más grandes posible.

m.c.m.

Factores **comunes y no comunes** elevados al **mayor** exponente. Se usa cuando algo vuelve a coincidir.

Relación entre ambos

$$a \cdot b = \text{m.c.d.}(a, b) \cdot \text{m.c.m.}(a, b)$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

D

Divisor de un número DEFINICIÓN 14

E

Elemento absorbente DEFINICIÓN 12
Elemento inverso (simétrico) DEFINICIÓN 12
Elemento neutro (identidad) DEFINICIÓN 11

M

Máximo común divisor DEFINICIÓN 17
Mínimo común múltiplo DEFINICIÓN 18
Múltiplo de un número DEFINICIÓN 13

N

Número primo y número compuesto DEFINICIÓN 15
Números enteros, opuesto y valor absoluto DEFINICIÓN 6

O

Operación combinada DEFINICIÓN 3

P

Propiedad de una operación DEFINICIÓN 9

T

Teorema fundamental de la aritmética TEOREMA 16