ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Estadística unidimensional 3

Conceptos básicos 3
Tablas de frecuencias 5
Parámetros de centralización 7
Parámetros de dispersión 8
Parámetros de posición 10

2. Estadística bidimensional 12

Conceptos básicos 12
Distribuciones 13
Covarianza 14
Correlación 15
Regresión lineal 16
Ejemplo resuelto 18

3. Probabilidad y combinatoria 20

Principio de multiplicación, factorial y números combinatorios 20
Combinatoria 22
Combinatoria: ¿Cuál utilizar? 24
Fundamentos de probabilidad 25
Operaciones con sucesos 26
Propiedades y cálculo de probabilidades 29
Probabilidad condicionada e independencia 32
Experimentos compuestos 34

4. Distribuciones de probabilidad 37

Variables aleatorias discretas 37
Distribución binomial 40
Distribución normal 41
Aproximación de la binomial a la normal 45

Resumen 47

Índice de conceptos 50

TEMA 1

ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL

Resumen estructurado de estadística unidimensional: conceptos básicos, tablas de frecuencias y parámetros estadísticos.

Conceptos básicos

DEFINICIÓN

Población y muestra

- **Población:** Conjunto total de elementos objeto de estudio.
- **Muestra:** Subconjunto representativo de la población seleccionado para el estudio.
- **Individuo:** Cada uno de los elementos de la población.

EJEMPLO:

Se quiere conocer cuántos hermanos tienen los 800 alumnos de un instituto. La población son los 800 alumnos; si se pregunta solo a 20 elegidos al azar, esos 20 forman una muestra. Cada alumno es un individuo.

DEFINICIÓN

Variable estadística

Una **variable estadística** es la característica que se estudia en cada individuo de la población. Tipos:

- **Cualitativa:** sus valores son categorías, no números (color de ojos).
- **Cuantitativa discreta:** toma valores numéricos aislados (número de hermanos: $0, 1, 2, \ldots$).
- **Cuantitativa continua:** puede tomar cualquier valor de un intervalo (altura, peso); se agrupa en intervalos y cada uno se representa por su **marca de clase** (el punto medio).

EJEMPLO:

Color de pelo: cualitativa. Número de hermanos: cuantitativa discreta. Estatura en cm: cuantitativa continua; el intervalo $[160, 170)$ tiene marca de clase 165.

Tablas de frecuencias

DEFINICIÓN

Tabla de frecuencias

Una **tabla de frecuencias** recoge cada valor distinto x_i de la variable con las veces que aparece. Si hay k valores distintos y N datos en total, se definen:

- **Frecuencia absoluta** f_i: número de veces que aparece x_i. Cumple $\sum f_i = N$.
- **Frecuencia relativa** h_i: proporción de datos que valen x_i. Cumple $\sum h_i = 1$.
- **Frecuencias acumuladas** F_i y H_i: suma de las frecuencias (absolutas o relativas) hasta el valor x_i inclusive. La última es $F_k = N$ y $H_k = 1$.

$$h_i = \frac{f_i}{N} \qquad F_i = f_1 + \cdots + f_i \qquad H_i = h_1 + \cdots + h_i$$

EJEMPLO:

Número de hermanos de 20 alumnos: 0 (3 alumnos), 1 (8), 2 (6), 3 (2) y 4 (1), con $N = 20$.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	3	8	6	2	1
h_i	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05
F_i	3	11	17	19	20
H_i	0,15	0,55	0,85	0,95	1

Por ejemplo, $h_2 = \frac{8}{20} = 0{,}40$ y $F_3 = 3 + 8 + 6 = 17$: hay 17 alumnos con 2 hermanos o menos.

DEFINICIÓN

Frecuencia absoluta y relativa

- **Frecuencia absoluta (f_i):** Número de veces que aparece un dato. La suma total es N.
- **Frecuencia relativa (h_i):** Proporción del dato respecto al total. $\sum h_i = 1$.

$$h_i = \frac{f_i}{N}$$

EJEMPLO:

En la tabla anterior, el valor $x_2 = 1$ aparece $f_2 = 8$ veces: su frecuencia relativa es $h_2 = \frac{8}{20} = 0{,}40$, es decir, el $40\,\%$ de los alumnos.

DEFINICIÓN

Frecuencias acumuladas

- **Frecuencia absoluta acumulada (F_i):** Suma de las frecuencias absolutas hasta la posición i.
- **Frecuencia relativa acumulada (H_i):** Suma de las frecuencias relativas hasta la posición i.

Son fundamentales para calcular la mediana y los cuantiles.

$$F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$$

EJEMPLO:

$F_2 = f_1 + f_2 = 3 + 8 = 11$: 11 alumnos tienen 1 hermano o menos. $H_2 = 0{,}15 + 0{,}40 = 0{,}55$: el $55\,\%$.

Parámetros de centralización

DEFINICIÓN

Media aritmética

La **media aritmética** es el valor promedio de los datos: la suma de todos los datos dividida entre N. Con una tabla de frecuencias, cada valor se multiplica por su frecuencia. Es muy sensible a los valores extremos. Notación: $\sum$ significa «suma de».

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i}{N}$$

EJEMPLO:

Datos: $2, 3, 3, 5, 7 (N = 5)$: $\bar{x} = \frac{2+3+3+5+7}{5} = \frac{20}{5} = 4$

Con la tabla de hermanos: $\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{20} = \frac{30}{20} = 1{,}5$

DEFINICIÓN

Moda (M_o)

La **moda** es el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta. Puede haber más de una moda (distribución bimodal, etc.). Es el único parámetro de centralización que tiene sentido para variables cualitativas.

EJEMPLO:

Datos $2, 3, 3, 5, 7$: $M_o = 3$ (aparece dos veces).

Tabla de hermanos: $M_o = 1$ ($f = 8$ es la mayor).

DEFINICIÓN

Mediana (M_e)

Es el valor que ocupa la posición central cuando los datos están ordenados.

- N **impar:** es el dato central.
- N **par:** es la media de los dos datos centrales.

En una tabla de frecuencias se calcula $\frac{N}{2}$ y se busca el primer valor cuya F_i **supera** $\frac{N}{2}$. Si alguna F_i es exactamente igual a $\frac{N}{2}$, la mediana es la media entre ese valor y el siguiente.

EJEMPLO:

Datos: $2, 3, 3, 5, 7, 8 (N = 6)$: los datos centrales son el 3 y el 5, así que $M_e = \frac{3+5}{2} = 4$.
Tabla de hermanos: $\frac{N}{2} = 10$ y el primer F_i mayor que 10 es $F_2 = 11$, que corresponde a $x = 1$: $M_e = 1$.

Parámetros de dispersión

DEFINICIÓN

Rango o recorrido

El **rango** es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo. Mide la amplitud total de los datos, pero depende solo de los dos extremos.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

EJEMPLO:

Datos $2, 3, 3, 5, 7$: $R = 7 - 2 = 5$.

DEFINICIÓN

Varianza

La **varianza** σ^2 es la media de los cuadrados de las distancias de cada dato a la media. Nunca es negativa, y vale 0 solo si todos los datos son iguales. Sus unidades son las de los datos al cuadrado. Desarrollando el cuadrado se obtiene la forma abreviada, más cómoda para calcular.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N} = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

EJEMPLO:

Datos $2, 3, 3, 5, 7$ con $\bar{x} = 4$: $\dfrac{\sum x_i^2}{N} = \dfrac{4 + 9 + 9 + 25 + 49}{5} = 19{,}2$, luego $\sigma^2 = 19{,}2 - 4^2 = 3{,}2$.
Comprobación con la definición: $\frac{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$ ✓

DEFINICIÓN

Desviación típica

Raíz de la varianza. Se mide en las mismas unidades que los datos, lo que la hace más interpretable.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

EJEMPLO:

Con $\sigma^2 = 3{,}2$: $\sigma = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79$.

DEFINICIÓN

Coeficiente de variación

No tiene unidades, así que permite comparar la dispersión de poblaciones distintas (por ejemplo, el peso de elefantes y el de ratones). Cuanto mayor es, más dispersos están los datos. Se suele dar en porcentaje: $CV = 0{,}15$ significa un $15\,\%$.

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|}$$

EJEMPLO:

Datos $2, 3, 3, 5, 7$: $CV = \frac{1{,}79}{4} \approx 0{,}45$, es decir, un $45\,\%$.
Tabla de hermanos: $\sigma \approx 1{,}02$ y $\bar{x} = 1{,}5$, luego $CV \approx 0{,}68$: la variable es más dispersa, en proporción a su media.

Parámetros de posición

DEFINICIÓN

Cuartiles

Los **cuartiles** Q_1, Q_2, Q_3 dividen los datos ordenados en 4 partes con la misma cantidad de datos (Q_2 es la mediana). Para Q_k ($k = 1, 2, 3$) se calcula la posición $P = \frac{k \cdot N}{4}$:

- Si P **no es entero**, se redondea al siguiente entero y Q_k es el valor en esa posición.
- Si P **es entero**, Q_k es la media de los valores en las posiciones P y $P + 1$.

EJEMPLO:

Tabla de hermanos ($N = 20$, datos ordenados: tres 0, ocho 1, seis 2, dos 3, un 4):
• Q_1: $P = 5$ entero → media de las posiciones 5 y 6 (ambas valen 1) → $Q_1 = 1$.
• Q_2: $P = 10$ → posiciones 10 y 11 (ambas 1) → $Q_2 = 1$.
• Q_3: $P = 15$ → posiciones 15 y 16 (ambas 2) → $Q_3 = 2$.

DEFINICIÓN

Percentiles (P_k)

El **percentil** P_k es el valor que deja por debajo el $k\,\%$ de los datos ordenados. Se calcula como los cuartiles, con la posición $P = \frac{k \cdot N}{100}$: si no es entera, se redondea al siguiente entero; si es entera, se toma la media de las posiciones P y $P+1$. Cuartiles y mediana son percentiles: $Q_1 = P_{25}$, $M_e = P_{50}$, $Q_3 = P_{75}$.

EJEMPLO:

Tabla de hermanos: P_{90}: posición $\frac{90 \cdot 20}{100} = 18$, entera → media de las posiciones 18 y 19 (ambas valen 3) → $P_{90} = 3$: el $90\,\%$ de los alumnos tiene 3 hermanos o menos.

PROCEDIMIENTO

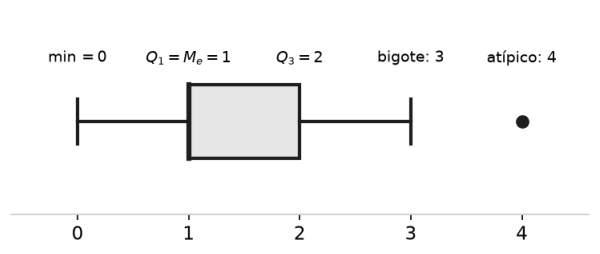
Diagrama de caja y bigotes

Representación gráfica basada en los cuartiles.

- **Caja:** va desde Q_1 hasta Q_3. La línea interior es la mediana (M_e). Su anchura es el **rango intercuartílico** ($RI = Q_3 - Q_1$), donde está el $50\,\%$ central de los datos.
- **Bigotes:** llegan hasta el dato mínimo y el dato máximo. Si se quieren señalar datos atípicos, los bigotes llegan solo hasta el último dato que está a menos de $1{,}5 \cdot RI$ de la caja, y los datos más alejados se marcan como puntos aislados.

EJEMPLO:

Tabla de hermanos: mínimo 0, $Q_1 = 1$, $M_e = 1$, $Q_3 = 2$, máximo 4. El rango intercuartílico es $RI = 2 - 1 = 1$.
Límite superior para datos atípicos: $Q_3 + 1{,}5 \cdot RI = 3{,}5$. El dato 4 lo supera, así que es un valor atípico (se marca como punto aislado) y el bigote superior llega solo hasta 3.



TEMA 2

ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

Estudio conjunto de dos variables para analizar la relación y dependencia entre ellas, incluyendo distribuciones, correlación y regresión lineal.

Conceptos básicos

DEFINICIÓN

Variable estadística bidimensional

Una **variable estadística bidimensional** (X,Y) estudia a la vez dos caracteres de cada individuo de una población, para analizar si existe relación entre ellos. Los datos son pares (x_i,y_j). Si hay pocos datos se dan como lista de pares; si hay muchos, en una **tabla de doble entrada** con las frecuencias conjuntas. Gráficamente se representan en una **nube de puntos** (diagrama de dispersión).

EJEMPLO:

> De cada alumno se anota X = horas de estudio al día y Y = nota del examen: el alumno que estudia 2 h y saca un 6 aporta el par $(2,6)$.

DEFINICIÓN

Frecuencia conjunta (f_{ij})

La **frecuencia conjunta** f_{ij} es el número de individuos que presentan a la vez el valor x_i de X y el valor y_j de Y. La suma de todas las frecuencias conjuntas es el total de la población, N.

$$\sum_i \sum_j f_{ij} = N$$

EJEMPLO:

Tabla de doble entrada (se usará en los apartados siguientes):

$X \backslash Y$	1	2	$f_{i\cdot}$
1	4	1	5
2	3	3	6
3	1	8	9
$f_{\cdot j}$	8	12	20

$f_{32} = 8$: hay 8 individuos con $X = 3$ e $Y = 2$. La suma de todas las frecuencias conjuntas es $4 + 1 + 3 + 3 + 1 + 8 = 20 = N$.

Distribuciones

DEFINICIÓN

Distribuciones marginales

La **distribución marginal** de una variable es la distribución unidimensional de esa variable ignorando la otra. Se obtiene sumando las frecuencias conjuntas por filas (marginal de X, $f_{i\cdot}$) o por columnas (marginal de Y, $f_{\cdot j}$). Con ellas se calculan $\bar{x}$, σ_x, $\bar{y}$ y σ_y como en estadística unidimensional.

EJEMPLO:

En la tabla anterior: marginal de X: $f_{1\cdot} = 4 + 1 = 5$, $f_{2\cdot} = 6$, $f_{3\cdot} = 9$. Marginal de Y: $f_{\cdot 1} = 4 + 3 + 1 = 8$ y $f_{\cdot 2} = 12$.
$\bar{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9}{20} = 2{,}2$ y $\bar{y} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 12}{20} = 1{,}6$.

DEFINICIÓN

Distribuciones condicionadas

La **distribución condicionada** de Y a $X = x_i$ es la distribución de Y considerando solo los individuos con $X = x_i$ (una fila de la tabla); análogamente se define la de X a $Y = y_j$ (una columna). Sus frecuencias suman $f_{i\cdot}$ (o $f_{\cdot j}$).

EJEMPLO:

Distribución de Y condicionada a $X = 3$ (tercera fila): $y = 1$ con $f = 1$ e $y = 2$ con $f = 8$, en total 9 individuos. Su media es $\frac{1\cdot 1 + 2\cdot 8}{9} = \frac{17}{9} \approx 1{,}89$.

Covarianza

DEFINICIÓN

Covarianza (σ_{xy})

La **covarianza** es la media del producto de las desviaciones de cada variable respecto de su media. Indica si hay relación lineal y su sentido:

- $\sigma_{xy} > 0$: correlación positiva (directa).
- $\sigma_{xy} < 0$: correlación negativa (inversa).
- $\sigma_{xy} = 0$: no hay correlación lineal.

Su valor depende de las unidades de X e Y, por eso no mide la intensidad (para eso está r).

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_{ij}\,(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{N} = \frac{\sum f_{ij}\,x_i y_j}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

EJEMPLO:

Con la tabla anterior: $\sum f_{ij} x_i y_j = 4\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 1 + 8\cdot 3\cdot 2 = 75$.
$\sigma_{xy} = \dfrac{75}{20} - 2{,}2\cdot 1{,}6 = 3{,}75 - 3{,}52 = 0{,}23 > 0$: correlación directa.

Correlación

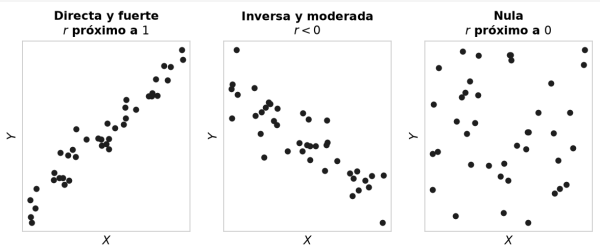
DEFINICIÓN

Tipos de correlación

La correlación indica la relación o dependencia entre las variables. Puede clasificarse de varias formas:

- **Funcional:** Existe una relación exacta, $y = f(x)$.
- **Aleatoria:** Existe relación estadística pero no exacta.
- **Nula:** No hay relación entre las variables.
- **Directa (Positiva):** Al aumentar una variable, aumenta la otra.
- **Inversa (Negativa):** Al aumentar una variable, la otra disminuye.
- **Fuerte:** La dependencia es alta (los puntos están muy cerca de la recta de regresión).
- **Débil:** La dependencia es baja (la nube de puntos es muy dispersa).

EJEMPLO:



DEFINICIÓN

Coeficiente de correlación lineal (r)

El **coeficiente de correlación lineal** r mide el grado de asociación lineal y el sentido de la correlación. Es adimensional y siempre cumple $-1 \leq r \leq 1$.

- $r > 0$: correlación directa. $r < 0$: inversa.
- $|r|$ cercano a 1: correlación fuerte (puntos casi alineados). $|r| = 1$: dependencia funcional lineal.
- r cercano a 0: correlación débil o nula (nube redonda).

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

EJEMPLO:

Con la tabla anterior: $\sigma_x = \sqrt{\frac{110}{20} - 2{,}2^2} = \sqrt{0{,}66} \approx 0{,}81$ y $\sigma_y = \sqrt{\frac{56}{20} - 1{,}6^2} = \sqrt{0{,}24} \approx 0{,}49$.
$r = \dfrac{0{,}23}{0{,}81 \cdot 0{,}49} \approx 0{,}58$: correlación directa y moderada.

Regresión lineal

DEFINICIÓN

Rectas de regresión

Las **rectas de regresión** son las rectas que mejor se ajustan a la nube de puntos según el método de mínimos cuadrados (minimizan la suma de los cuadrados de las distancias). Hay dos, la de Y sobre X y la de X sobre Y; ambas pasan por el **centro de gravedad** $(\bar{x}, \bar{y})$ y permiten hacer estimaciones.

PROPIEDAD

Recta de regresión de Y sobre X

Minimiza las distancias **verticales**. Se utiliza para estimar Y conocido un valor de X. El cociente $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ es la pendiente de la recta.

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$

EJEMPLO:

Con la tabla anterior: pendiente $\frac{0{,}23}{0{,}66} \approx 0{,}35$, luego $y - 1{,}6 = 0{,}35(x - 2{,}2)$, es decir, $y \approx 0{,}35x + 0{,}83$. Para $x = 2$: $y \approx 1{,}53$.

PROPIEDAD

Recta de regresión de X sobre Y

Minimiza las distancias **horizontales**. Se utiliza para estimar X conocido un valor de Y. No es la misma recta que la anterior, salvo que la dependencia sea funcional $(r = \pm 1)$: **no se debe despejar** una de la otra.

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})$$

Ejemplo resuelto

PROCEDIMIENTO

Datos y parámetros

Gasto en publicidad x y ventas y de una empresa (en miles de euros) durante cinco meses. Primero se calculan las sumas, después las medias, las varianzas y la covarianza.

x_i	2	3	4	5	6
y_i	4	5	7	8	11

EJEMPLO:

$\sum x_i = 20$, $\sum y_i = 35$, $\sum x_i^2 = 90$, $\sum y_i^2 = 275$, $\sum x_i y_i = 157$, $N = 5$

$\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 7$

$\sigma_x^2 = \dfrac{90}{5} - 16 = 2$, $\sigma_y^2 = \dfrac{275}{5} - 49 = 6$

$\sigma_{xy} = \dfrac{157}{5} - 4 \cdot 7 = 3{,}4$

PROCEDIMIENTO

Correlación

r es positivo y muy próximo a 1: la correlación es directa y muy fuerte. Cuanto más se invierte en publicidad, más se vende.

$$r = \frac{3{,}4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} \approx 0{,}98$$

PROCEDIMIENTO

Recta de regresión y estimación

La estimación es fiable porque r está muy cerca de 1 y $x = 5{,}5$ está dentro del rango de los datos. Si el valor de x queda lejos de los datos observados, la estimación es menos fiable.

$$y - 7 = \frac{3{,}4}{2}(x - 4) \implies y = 1{,}7x + 0{,}2$$

EJEMPLO:

Para un gasto de $x = 5{,}5$: $y = 1{,}7 \cdot 5{,}5 + 0{,}2 = 9{,}55$ miles de euros

TEMA 3

PROBABILIDAD Y COMBINATORIA

Estudio de las diferentes formas de agrupar y ordenar elementos de un conjunto, junto con los fundamentos del cálculo de probabilidades.

Principio de multiplicación, factorial y números combinatorios

PROPIEDAD

Principio de multiplicación

Si una tarea se puede realizar en m formas distintas y, después, una segunda tarea se puede realizar en n formas distintas (sin importar cómo se hizo la primera), entonces las dos tareas, una a continuación de otra, se pueden realizar de $m \cdot n$ formas. Se extiende a cualquier número de tareas. Es la base de todas las fórmulas de combinatoria.

$$\text{formas} = m \cdot n \cdot p \cdots$$

EJEMPLO:

Un menú se compone de un primero (3 opciones), un segundo (4 opciones) y un postre (2 opciones): hay $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús distintos.

DEFINICIÓN

Factorial

El **factorial** de un número natural n es el producto de todos los naturales de 1 a n. Por convenio, $0! = 1$. Crece muy deprisa.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \qquad 0! = 1$$

EJEMPLO:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \qquad 6! = 720 \qquad \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$$

DEFINICIÓN

Número combinatorio

El **número combinatorio** $\binom{n}{k}$ (se lee «n sobre k»), con $0 \le k \le n$, se define mediante factoriales. Cuenta de cuántas formas se pueden elegir k elementos de entre n sin importar el orden. Cumple $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ y $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

EJEMPLO:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{12} = 10 \qquad \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$$

Combinatoria

DEFINICIÓN

Permutaciones

Una **permutación** de n elementos es cada una de las formas de ordenar todos ellos, sin repetir. Se utilizan todos los elementos y el orden importa. Por el principio de multiplicación hay n opciones para el primer lugar, $n-1$ para el segundo, etc.

$$P_n = n!$$

EJEMPLO:

¿De cuántas formas pueden sentarse 5 personas en un banco? $P_5 = 5! = 120$ formas.

DEFINICIÓN

Permutaciones con repetición

Son las formas de ordenar n elementos de los que algunos se repiten: a iguales de un tipo, b de otro, c de otro, con $a+b+c=n$. Se utilizan todos los elementos y el orden importa. Se divide $n!$ entre las formas de reordenar los elementos idénticos.

$$PR_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!}$$

EJEMPLO:

¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra COCO? $PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ palabras.

DEFINICIÓN

Variaciones

Una **variación** de n elementos tomados de k en k es cada una de las formas de elegir y ordenar k elementos distintos entre n $(k \leq n)$. El orden importa y no hay repetición.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

EJEMPLO:

¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5? $V_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ números.

DEFINICIÓN

Variaciones con repetición

Son las formas de elegir y ordenar k elementos de n pudiendo repetirse el mismo. El orden importa. Cada uno de los k lugares puede ocuparse de n formas.

$$VR_n^k = n^k$$

EJEMPLO:

¿Cuántos resultados posibles hay al lanzar una moneda 3 veces? $VR_2^3 = 2^3 = 8$ resultados.

DEFINICIÓN

Combinaciones

Una **combinación** de n elementos tomados de k en k es cada subconjunto de k elementos elegidos entre n. El orden **no** importa y no hay repetición. Cada subconjunto de k elementos se puede ordenar de $k!$ formas, por eso $C_n^k = V_n^k / k!$.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

EJEMPLO:

En un grupo de 10 personas, ¿cuántos comités de 3 personas se pueden formar? $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$ comités.

DEFINICIÓN

Combinaciones con repetición

Son las formas de elegir k elementos de n tipos pudiendo repetir el mismo tipo. El orden **no** importa.

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

EJEMPLO:

En una pastelería hay 4 tipos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 6 pasteles? $CR_4^6 = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$ formas.

Combinatoria: ¿Cuál utilizar?

PROCEDIMIENTO

¿Importa el orden?

Es la primera pregunta. Si el orden de los elementos cambia el resultado (como en una contraseña), es Variación o Permutación. Si el orden NO importa (como elegir un grupo de amigos), es siempre una Combinación.

PROCEDIMIENTO

¿Se usan todos los elementos?

Si importa el orden y usamos TODOS los elementos disponibles, es una Permutación. Si solo elegimos una parte del total, es una Variación.

PROCEDIMIENTO

¿Se pueden repetir?

Una vez decidido el tipo (V, P o C), comprueba si el problema permite usar el mismo elemento varias veces. Si es así, utilizaremos la versión 'con repetición' de la fórmula.

Fundamentos de probabilidad

DEFINICIÓN

Experimento aleatorio

Aquel cuyo resultado no se puede predecir con exactitud antes de realizarlo, incluso si se repite bajo las mismas condiciones.

EJEMPLO:

Lanzar una moneda, tirar un dado o extraer una carta de una baraja.

DEFINICIÓN

Espacio muestral (E)

Conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

EJEMPLO:

En el lanzamiento de una moneda, el espacio muestral es $E = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$.

DEFINICIÓN

Sucesos elementales

Cada uno de los resultados simples e individuales que pueden ocurrir en un experimento aleatorio (componentes del espacio muestral).

EJEMPLO:

Obtener un '5' al lanzar un dado de seis caras.

DEFINICIÓN

Sucesos compuestos

Cualquier suceso que se puede descomponer en otros más simples; es decir, subconjuntos del espacio muestral formados por dos o más sucesos elementales.

EJEMPLO:

Obtener un número impar al lanzar un dado: $A = \{1, 3, 5\}$.

DEFINICIÓN

Suceso seguro

Aquel que siempre ocurre porque está formado por todos los resultados posibles del espacio muestral. Coincide con E.

EJEMPLO:

> Obtener un número del 1 al 6 al lanzar un dado de seis caras.

DEFINICIÓN

Suceso imposible

Aquel que nunca puede ocurrir. Se representa con el símbolo del conjunto vacío $\emptyset$.

EJEMPLO:

> Obtener un '7' al lanzar un dado de seis caras.

Operaciones con sucesos

DEFINICIÓN

Unión ($A \cup B$)

El suceso que ocurre cuando ocurre A, ocurre B o ambos a la vez. Es el conjunto de elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.

EJEMPLO:

> Al lanzar un dado, si $A = \{2, 4, 6\}$ (pares) y $B = \{1, 2, 3\}$ (menores que 4), entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

DEFINICIÓN

Intersección ($A \cap B$)

El suceso que ocurre cuando ocurren simultáneamente A y B. Es el conjunto de elementos comunes a A y B.

EJEMPLO:

Si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, entonces $A \cap B = \{2\}$.

DEFINICIÓN

Sucesos compatibles e incompatibles

Indican si dos sucesos pueden ocurrir al mismo tiempo o no:

- **Incompatibles:** No tienen ningún resultado en común. Si ocurre uno, no puede ocurrir el otro ($A \cap B = \emptyset$).
- **Compatibles:** Tienen al menos un resultado en común. Pueden ocurrir simultáneamente ($A \cap B \neq \emptyset$).

EJEMPLO:

Al lanzar un dado:
• **Incompatibles:** 'Sacar un 1' y 'Sacar un 6' (imposible ambos a la vez).
• **Compatibles:** 'Sacar par' (2, 4, 6) y 'Sacar mayor que 3' (4, 5, 6). Si sale un 4 o un 6, ocurren los dos.

DEFINICIÓN

Suceso contrario o complementario ($\bar{A}$)

Aquel que ocurre siempre que no ocurre A. Está formado por todos los elementos del espacio muestral que no están en A.

EJEMPLO:

Si $A = \{\text{sacar un } 6\}$ al lanzar un dado, su contrario es $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

DEFINICIÓN

Diferencia de sucesos ($A - B$)

El suceso que ocurre cuando ocurre A pero no ocurre B. Equivale a $A \cap \bar{B}$.

EJEMPLO:

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$, la diferencia $A - B = \{1, 2\}$.

TEOREMA

Leyes de De Morgan

Relacionan el contrario de la unión y la intersección:
1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (El contrario de la unión es la intersección de los contrarios).
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (El contrario de la intersección es la unión de los contrarios).

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

EJEMPLO:

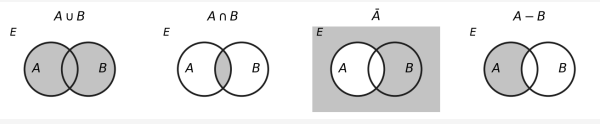
El contrario de «sacar un 1 o un 2» es «no sacar un 1 y no sacar un 2», es decir, $\{3, 4, 5, 6\}$.
El contrario de «par y mayor que 3» ($\{4, 6\}$) es «impar o menor o igual que 3»: $\{1, 2, 3, 5\}$ ✓

DEFINICIÓN

Operaciones con sucesos y diagramas de Venn

Los sucesos son **subconjuntos** del espacio muestral E, así que se operan como conjuntos y se visualizan en **diagramas de Venn**: el rectángulo es E y cada círculo, un suceso. La **unión** $A \cup B$ (A o B), la **intersección** $A \cap B$ (A y B), el **contrario** $\bar{A}$ (no A) y la **diferencia** $A - B$ (A pero no B) se definen en las tarjetas siguientes.

EJEMPLO:



Propiedades y cálculo de probabilidades

DEFINICIÓN

Probabilidad (axiomas de Kolmogorov)

La **probabilidad** es una función P que asigna a cada suceso A un número $P(A)$ y cumple tres axiomas:
1. $P(A) \geq 0$ para todo suceso A.
2. $P(E) = 1$ (el suceso seguro tiene probabilidad 1).
3. Si A y B son incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

De ellos se deduce que $0 \leq P(A) \leq 1$ y que $P(\emptyset) = 0$. Un valor 0 indica un suceso imposible y un valor 1 un suceso seguro.

$$P(A) \geq 0 \qquad P(E) = 1 \qquad A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

EJEMPLO:

La probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda equilibrada es $0{,}5$ (el $50\,\%$), y $P(\text{cara}) + P(\text{cruz}) = 1$.

TEOREMA

Ley de los grandes números

Señala que al repetir un experimento muchas veces, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a su probabilidad teórica.

EJEMPLO:

Si lanzamos una moneda 1000 veces, la proporción de caras será muy próxima a 0,5.

DEFINICIÓN

Regla de Laplace

Si todos los sucesos elementales son **equiprobables** (tienen la misma probabilidad), la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables a A y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

EJEMPLO:

Probabilidad de sacar un 5 en un dado: $P(5) = \frac{1}{6}$.
Probabilidad de sacar un número par: $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

PROPIEDAD

Probabilidad del suceso contrario

Como A y $\bar{A}$ son incompatibles y su unión es E, el tercer axioma da $P(A) + P(\bar{A}) = P(E) = 1$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

EJEMPLO:

Si la probabilidad de lluvia es $0{,}3$, la de que no llueva es $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

PROPIEDAD

Unión de sucesos compatibles

La probabilidad de que ocurra A o B es la suma de sus probabilidades menos la de su intersección (para no contar dos veces los resultados comunes).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EJEMPLO:

Si $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$, entonces $P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}8$.

PROPIEDAD

Unión de sucesos incompatibles

Si los sucesos son incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), su intersección tiene probabilidad 0 y la fórmula anterior se reduce a la suma (es el tercer axioma).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

EJEMPLO:

Al lanzar un dado, $P(\text{sacar 1 o 2}) = P(1) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

PROPIEDAD

Probabilidad de A y no B ($A \cap \bar{B}$)

La probabilidad de que ocurra A y NO ocurra B es igual a la probabilidad de A quitándole su parte compartida con B.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

EJEMPLO:

Si $P(A) = 0{,}5$ y la parte compartida es $P(A \cap B) = 0{,}1$, entonces la probabilidad de que ocurra solo A es $0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$.

Probabilidad condicionada e independencia

DEFINICIÓN

Probabilidad condicionada

La probabilidad de que ocurra A **sabiendo** que ya ha ocurrido B (con $P(B) > 0$) es la proporción que representa $A \cap B$ dentro de B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

EJEMPLO:

En una urna con 3 bolas rojas y 2 azules, se extraen dos bolas sin devolución. La probabilidad de que la segunda sea roja sabiendo que la primera fue azul es $P(R_2 \mid A_1) = \dfrac{3}{4}$: quedan 4 bolas y 3 son rojas.

DEFINICIÓN

Sucesos independientes

Dos sucesos son **independientes** si la ocurrencia de uno no afecta a la probabilidad del otro: $P(A \mid B) = P(A)$. Equivale a que la probabilidad de la intersección sea el producto de las probabilidades.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EJEMPLO:

Lanzar un dado y una moneda: $P(6 \text{ y cara}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

DEFINICIÓN

Sucesos dependientes

Dos sucesos son **dependientes** si no son independientes: la ocurrencia de uno altera la probabilidad del otro. En ese caso la intersección se calcula con la probabilidad condicionada.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

EJEMPLO:

Extraer dos cartas de una baraja española (40 cartas) sin devolver la primera. $P(\text{dos oros}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$.

TEOREMA

Regla del producto

Despejando en la definición de probabilidad condicionada se obtiene la probabilidad de la intersección. Si los sucesos son independientes, $P(B \mid A) = P(B)$ y queda el producto simple.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \qquad (\text{independientes: } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B))$$

EJEMPLO:

Independientes: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$.
Dependientes: $P(A) = 0{,}5$, $P(B \mid A) = 0{,}3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}15$.

Experimentos compuestos

DEFINICIÓN

Experimento compuesto

Un **experimento compuesto** es un proceso que ocurre en varias etapas (por ejemplo, elegir una caja y luego sacar una bola). Se resuelve dibujando un **diagrama de árbol**.

EJEMPLO:

Imagina que tienes dos cajas:
- **Caja 1:** Tiene 8 bolas rojas y 2 azules ($P(R) = 0{,}8$).
- **Caja 2:** Tiene 4 bolas rojas y 6 azules ($P(R) = 0{,}4$).

Primero eliges una caja al azar (50% cada una) y luego sacas una bola.

PROCEDIMIENTO

Diagrama de decisión (árbol)

Es el esquema visual para entender todos los pasos del ejemplo anterior:

INICIO ├── **Caja 1 (0,5)** ── 🔴 Roja (0,8) | └── 🔵 Azul (0,2) └── **Caja 2 (0,5)** ── 🔴 Roja (0,4) └── 🔵 Azul (0,6)

Regla: Para hallar la probabilidad de un camino, multiplica sus ramas ($0{,}5 \cdot 0{,}8$).

DEFINICIÓN

Sistema completo de sucesos

Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral, es decir, si en cada realización del experimento ocurre **exactamente uno** de ellos. Sus probabilidades suman 1.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n = E \qquad \sum P(A_i) = 1$$

EJEMPLO:

«Elegir la caja 1» y «elegir la caja 2» forman un sistema completo. También A y $\bar{A}$ para cualquier suceso A.

TEOREMA

Teorema de la probabilidad total

Si $A_1, \ldots, A_n$ es un sistema completo de sucesos y B otro suceso, la probabilidad de B se obtiene sumando todos los caminos del árbol que llegan a B.

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)$$

EJEMPLO:

¿Probabilidad de que la bola sea Roja?
Camino 1: $0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$
Camino 2: $0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$
Total: $0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$ **(60%)**

TEOREMA

Teorema de Bayes

Se usa cuando ya se conoce el resultado final B (la bola es roja) y se quiere hallar la probabilidad de que viniera de una causa concreta A_i (la caja 1): es el camino inverso del árbol. El denominador es la probabilidad total de B.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum_j P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}$$

EJEMPLO:

Si sabemos que la bola es Roja, ¿probabilidad de que sea de la Caja 1?

$\frac{\text{Prob. de ese camino}}{\text{Prob. Total}} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}6} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = 0{,}67$ (67%)

TEMA 4

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Estudio de las variables aleatorias discretas y continuas, incluyendo la distribución binomial y la distribución normal estándar con su uso práctico en el cálculo de probabilidades.

Variables aleatorias discretas

DEFINICIÓN

Variable aleatoria discreta

Una **variable aleatoria discreta** X es una función que asigna un valor numérico a cada resultado de un experimento aleatorio. Se llama **discreta** porque solo puede tomar valores aislados (finitos o infinitos numerables), como el número de caras al lanzar monedas o el número de goles en un partido.

EJEMPLO:

> Al lanzar dos dados, X = «suma de los valores obtenidos» puede tomar los valores $2, 3, 4, \ldots, 12$.

DEFINICIÓN

Función de probabilidad

La **función de probabilidad** (o distribución de probabilidad) asigna a cada valor posible x_i de la variable su probabilidad p_i. Se suele representar en una tabla:

$$P(X = x_i) = p_i, \quad \text{donde } \sum_i p_i = 1 \text{ y } p_i \geq 0$$

EJEMPLO:

Sea X = «número de caras al lanzar 2 monedas»:

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Comprobación: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓

DEFINICIÓN

Función de distribución

La **función de distribución acumulada** $F(x)$ da la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que x. Es una función escalonada que empieza en 0 y termina en 1.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

EJEMPLO:

Para el ejemplo anterior (2 monedas):

x	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$x \geq 2$
$F(x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

DEFINICIÓN

Media (esperanza matemática)

La **media** o **esperanza matemática** μ representa el valor promedio que esperamos obtener a largo plazo al repetir el experimento muchas veces. Es el «centro de gravedad» de la distribución.

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

EJEMPLO:

Para X = número de caras con 2 monedas:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

En promedio, al lanzar 2 monedas se obtiene 1 cara.

DEFINICIÓN

Varianza y desviación típica

La **varianza** σ^2 de una variable aleatoria es la media de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media: mide su dispersión. La **desviación típica** σ es su raíz cuadrada y se expresa en las mismas unidades que la variable.

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

EJEMPLO:

Para el ejemplo anterior ($\mu = 1$):

$$\sigma^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{2}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2 = 0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = 0{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$$

Distribución binomial

DEFINICIÓN

Distribución binomial

Una variable aleatoria X sigue una **distribución binomial** $B(n,p)$ si cuenta el número de éxitos en n repeticiones de un experimento con solo dos resultados posibles: **éxito** (probabilidad p) y **fracaso** (probabilidad $1-p$). Debe cumplirse que el experimento se repita un número fijo n de veces, que las repeticiones sean **independientes** y que p sea constante. Se escribe $X \sim B(n,p)$.

EJEMPLO:

El número de caras al lanzar 5 monedas equilibradas es $B(5;0{,}5)$. En cambio, el número de bolas rojas al extraer 3 bolas **sin devolución** de una urna no es binomial, porque las extracciones no son independientes.

TEOREMA

Función de probabilidad de la binomial

La probabilidad de obtener exactamente k éxitos es el número de formas de colocar los k éxitos entre los n intentos, $\binom{n}{k}$, por la probabilidad de cada una: $p^k(1-p)^{n-k}$.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\dots,n$$

EJEMPLO:

Se lanza una moneda 5 veces. ¿Probabilidad de obtener exactamente 3 caras? Con $X \sim B(5,0{,}5)$:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}5^2=10\cdot 0{,}125\cdot 0{,}25=0{,}3125$$

TEOREMA

Media y varianza de la binomial

Son fórmulas directas que evitan calcular toda la distribución. La media indica el número esperado de éxitos, la varianza mide la dispersión y la desviación típica se expresa en las mismas unidades que la variable.

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

EJEMPLO:

Si $X \sim B(20, 0{,}3)$ (20 preguntas de test, probabilidad de acertar 0,3):

$$\mu = 20 \cdot 0{,}3 = 6 \text{ aciertos esperados}$$

$$\sigma^2 = 20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 4{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{4{,}2} \approx 2{,}05$$

Distribución normal

DEFINICIÓN

Variable aleatoria continua y función de densidad

Una variable aleatoria es **continua** si puede tomar cualquier valor de un intervalo. Su distribución se describe con una **función de densidad** $f(x) \geq 0$ cuya gráfica encierra con el eje X un área total igual a 1. La probabilidad de que X esté en un intervalo es el **área** bajo la curva en ese intervalo. Por eso la probabilidad de un valor aislado es 0: $P(X = a) = 0$ y no importa si las desigualdades son estrictas o no.

$$P(a \leq X \leq b) = \text{área bajo } f \text{ entre } a \text{ y } b \qquad P(X = a) = 0$$

EJEMPLO:

La altura de los alumnos de un instituto es una variable continua: la probabilidad de medir *exactamente* $170{,}000\ldots$ cm es 0, pero la de medir entre 169 y 171 cm es positiva.

DEFINICIÓN

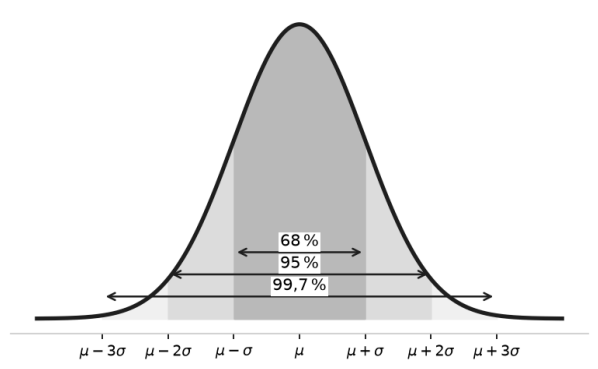
Distribución normal

La **distribución normal** $X \sim N(\mu, \sigma)$ es la distribución continua más importante. Su función de densidad tiene forma de **campana de Gauss**, simétrica respecto de la media μ. El parámetro σ controla su anchura: a mayor σ, curva más aplastada y dispersa. El área total es 1 y $P(X \leq \mu) = 0{,}5$.
Regla empírica: en una normal, aproximadamente el $68\,\%$ de los valores está a menos de σ de la media, el $95\,\%$ a menos de 2σ y el $99{,}7\,\%$ a menos de 3σ.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

EJEMPLO:

Alturas de personas adultas, errores de medición, notas de un examen con muchos alumnos… suelen seguir una distribución normal. Si las alturas siguen $N(170, 6)$, el $95\,\%$ de las personas mide entre $170 - 12 = 158$ y $170 + 12 = 182$ cm.



DEFINICIÓN

Distribución normal estándar $N(0,1)$

La **distribución normal estándar** $Z \sim N(0,1)$ es una normal con media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$. Para calcular probabilidades en cualquier distribución normal, se utilizan las **tablas de la normal estándar**, que dan el valor de la función de distribución acumulada:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

Es decir, $\Phi(z)$ es el área bajo la curva a la izquierda del valor z. La tabla siempre da la probabilidad **acumulada desde** $-\infty$ **hasta** z.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

PROPIEDAD

Cómo usar la tabla: propiedades clave

Con la tabla de la normal estándar solo obtenemos $P(Z \leq z)$. Para otros casos usamos:

- **Cola derecha:** $P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$
- **Intervalo:** $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- **Valores negativos:** $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (por simetría)

EJEMPLO:

Ejemplo: Calcular $P(Z > 1{,}5)$ y $P(-1 < Z < 2)$:

• $P(Z > 1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$
• $P(-1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1))$
$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185$

PROCEDIMIENTO

Tipificación: de $N(\mu, \sigma)$ a $N(0,1)$

Para calcular probabilidades con una normal cualquiera $X \sim N(\mu, \sigma)$, se **tipifica** (estandariza) la variable restando la media y dividiendo por la desviación típica. Así se obtiene una variable $Z \sim N(0,1)$ y se puede usar la tabla.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

EJEMPLO:

Ejemplo completo: Las notas de un examen siguen $X \sim N(6, 1{,}5)$. ¿Qué porcentaje de alumnos sacó más de un 8?

1. Tipificamos: $z = \dfrac{8-6}{1{,}5} = \dfrac{2}{1{,}5} \approx 1{,}33$
2. Buscamos en la tabla: $\Phi(1{,}33) = 0{,}9082$
3. Cola derecha: $P(X > 8) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

Aproximadamente el **9,2% de los alumnos** sacó más de un 8.

Aproximación de la binomial a la normal

DEFINICIÓN

Aproximación normal de la binomial y corrección de Yates

Cuando n es grande y p no es extremo, la binomial $B(n,p)$ se puede aproximar por una normal $N(\mu,\sigma)$ con $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Como la binomial es **discreta** y la normal es **continua**, se aplica la **corrección por continuidad de Yates**, que consiste en ampliar 0,5 el intervalo por cada lado antes de tipificar.

Criterio de aplicación: $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot (1-p) \geq 5$.

EJEMPLO:

Probabilidad original (discreta)	Aproximación continua (con Yates)
$P(X = k)$	$P(k - 0{,}5 < X < k + 0{,}5)$
$P(X \leq k)$	$P(X < k + 0{,}5)$
$P(X \geq k)$	$P(X > k - 0{,}5)$
$P(X < k)$	$P(X < k - 0{,}5)$
$P(X > k)$	$P(X > k + 0{,}5)$

PROCEDIMIENTO

Ejemplo de aproximación paso a paso

Una vez aplicada la corrección de Yates, se tipifica el valor corregido y se usa la tabla de la normal estándar.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

EJEMPLO:

Ejemplo: $X \sim B(100, 0{,}4)$. Calcular $P(X \leq 35)$.

1. **Comprobar criterio:** $np = 40 \geq 5$ y $n(1-p) = 60 \geq 5$ ✓
2. **Parámetros:** $\mu = 100 \cdot 0{,}4 = 40$, $\quad \sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{24} \approx 4{,}90$
3. **Corrección de Yates** $(X \leq k \to X < k + 0{,}5)$: $P(X \leq 35) \approx P(X < 35{,}5)$
4. **Tipificar:** $z = \dfrac{35{,}5 - 40}{4{,}90} \approx -0{,}92$
5. **Tabla** (simetría): $\Phi(-0{,}92) = 1 - \Phi(0{,}92) = 1 - 0{,}8212 = \mathbf{0{,}1788}$

RESUMEN

1. Estadística unidimensional

Variables

Cualitativas (categorías) o cuantitativas: discretas (valores aislados) o continuas (intervalos, se usa la marca de clase).

Frecuencias

f_i absoluta, h_i relativa, F_i y H_i acumuladas.

$$h_i = \frac{f_i}{N} \qquad F_i = f_1 + \cdots + f_i$$

Centralización

Moda: el valor más frecuente. Mediana: el valor central de los datos ordenados.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

Dispersión

$$R = x_{\max} - x_{\min} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|}$$

Posición

Q_1, $Q_2 = M_e$, Q_3 dividen los datos en cuatro partes; P_k deja el $k\%$ por debajo. Diagrama de caja: de Q_1 a Q_3, con la mediana dentro.

$$\text{posición de } Q_k = \frac{k \cdot N}{4}$$

2. Estadística bidimensional

Variable bidimensional

Estudia dos caracteres (X, Y) a la vez. Marginales: cada variable por separado. Condicionada: una variable fijado un valor de la otra.

Covarianza

Positiva: relación directa; negativa: inversa.

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_{ij}\, x_i y_j}{N} - \bar{x}\,\bar{y}$$

Coeficiente de correlación

$-1 \leq r \leq 1$. Cerca de ± 1: correlación fuerte; cerca de 0: débil. El signo es el de la covarianza.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Rectas de regresión

Ambas pasan por $(\bar{x}, \bar{y})$. Para estimar y se usa la de Y sobre X; las estimaciones son fiables si $|r|$ es próximo a 1.

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \qquad x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})$$

3. Probabilidad y combinatoria

Factorial y número combinatorio

$$n! = n(n-1)\cdots 1 \qquad 0! = 1 \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Combinatoria

¿Importa el orden? No → combinaciones. Sí → ¿se usan todos? Sí → permutaciones; no → variaciones. Después, ¿se repiten?

$$P_n = n! \quad V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad VR_n^k = n^k \quad C_n^k = \binom{n}{k} \quad PR_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!} \quad CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Sucesos

Unión: ocurre A o B. Intersección: ocurren los dos. Incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Laplace y propiedades

Laplace solo si los resultados son equiprobables.

$$P(A) = \frac{\text{favorables}}{\text{posibles}} \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Condicionada e independencia

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \qquad \text{independientes} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Probabilidad total y Bayes

Con un sistema completo de sucesos $A_1, \ldots, A_n$ (diagrama de árbol).

$$P(B) = \sum P(A_i)\,P(B \mid A_i) \qquad P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\,P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

4. Distribuciones de probabilidad

Variable aleatoria discreta

Las probabilidades suman 1.

$$\mu = \sum x_i p_i \qquad \sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2 \qquad F(x) = P(X \leq x)$$

Binomial $B(n, p)$

Número de éxitos en n pruebas independientes con la misma probabilidad de éxito p.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Normal $N(\mu, \sigma)$

Continua: la probabilidad es un área y $P(X = a) = 0$. Se tipifica para usar la tabla de $N(0, 1)$.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Uso de la tabla

La tabla da $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

$$P(Z > z) = 1 - \Phi(z) \qquad P(Z \leq -z) = 1 - \Phi(z) \qquad P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Binomial aproximada por la normal

Si $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$. Corrección de Yates: $P(X = k) \approx P(k - 0{,}5 \leq X' \leq k + 0{,}5)$.

$$B(n, p) \approx N\big(np,\ \sqrt{np(1-p)}\big)$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

A

Aproximación normal de la binomial y corrección de Yates DEFINICIÓN 45

C

Coeficiente de correlación lineal (r) DEFINICIÓN 16
Coeficiente de variación DEFINICIÓN 10
Combinaciones DEFINICIÓN 23
Combinaciones con repetición DEFINICIÓN 24
Covarianza (σ_{xy}) DEFINICIÓN 14
Cuartiles DEFINICIÓN 10

D

Desviación típica DEFINICIÓN 9
Diferencia de sucesos $(A - B)$ DEFINICIÓN 28
Distribución binomial DEFINICIÓN 40
Distribución normal DEFINICIÓN 42
Distribución normal estándar $N(0,1)$ DEFINICIÓN 43
Distribuciones condicionadas DEFINICIÓN 14
Distribuciones marginales DEFINICIÓN 13

E

Espacio muestral (E) DEFINICIÓN 25
Experimento aleatorio DEFINICIÓN 25
Experimento compuesto DEFINICIÓN 34

F

Factorial DEFINICIÓN 21
Frecuencia absoluta y relativa DEFINICIÓN 6
Frecuencia conjunta (f_{ij}) DEFINICIÓN 13
Frecuencias acumuladas DEFINICIÓN 6
Función de distribución DEFINICIÓN 38
Función de probabilidad DEFINICIÓN 38
Función de probabilidad de la binomial TEOREMA 40

I

Intersección $(A \cap B)$ DEFINICIÓN 27

L

Ley de los grandes números TEOREMA 29
Leyes de De Morgan TEOREMA 28

M

Media aritmética DEFINICIÓN 7
Media (esperanza matemática) DEFINICIÓN 39
Media y varianza de la binomial TEOREMA 41
Mediana (M_e) DEFINICIÓN 8
Moda (M_o) DEFINICIÓN 7

N

Número combinatorio DEFINICIÓN 21

O

Operaciones con sucesos y diagramas de Venn DEFINICIÓN 28

P

Percentiles (P_k) DEFINICIÓN 11
Permutaciones DEFINICIÓN 22
Permutaciones con repetición DEFINICIÓN 22
Población y muestra DEFINICIÓN 3
Probabilidad (axiomas de Kolmogorov) DEFINICIÓN 29
Probabilidad condicionada DEFINICIÓN 32

R

Rango o recorrido DEFINICIÓN 8
Rectas de regresión DEFINICIÓN 16
Regla de Laplace DEFINICIÓN 30
Regla del producto TEOREMA 33

S

Sistema completo de sucesos DEFINICIÓN 35
Suceso contrario o complementario ($\bar{A}$) DEFINICIÓN 27
Suceso imposible DEFINICIÓN 26
Suceso seguro DEFINICIÓN 26
Sucesos compatibles e incompatibles DEFINICIÓN 27
Sucesos compuestos DEFINICIÓN 25
Sucesos dependientes DEFINICIÓN 33
Sucesos elementales DEFINICIÓN 25
Sucesos independientes DEFINICIÓN 32

T

Tabla de frecuencias DEFINICIÓN 5
Teorema de Bayes TEOREMA 36
Teorema de la probabilidad total TEOREMA 35
Tipos de correlación DEFINICIÓN 15

U

Unión $(A \cup B)$ DEFINICIÓN 26

V

Variable aleatoria continua y función de densidad DEFINICIÓN 41
Variable aleatoria discreta DEFINICIÓN 37
Variable estadística DEFINICIÓN 4
Variable estadística bidimensional DEFINICIÓN 12
Variaciones DEFINICIÓN 23
Variaciones con repetición DEFINICIÓN 23
Varianza DEFINICIÓN 9
Varianza y desviación típica DEFINICIÓN 39