ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

OPERACIONES CON FRACCIONES

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Operaciones con fracciones **3**

Concepto de fracción 3
Fracciones equivalentes 4
Suma y resta 8
Multiplicación y división 9
Potencias de fracciones 11
Conceptos adicionales 11
Fracción generatriz 12

Resumen **15**

Índice de conceptos **16**

TEMA 1

OPERACIONES CON FRACCIONES

Guía completa para dominar las fracciones: fracciones equivalentes, amplificación y simplificación, operaciones básicas, potencias, inversas y fracción generatriz de un decimal.

Concepto de fracción

DEFINICIÓN

Fracción

Una **fracción** es una expresión $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y $b \neq 0$. El **denominador** b indica en cuántas partes iguales se divide la unidad y el **numerador** a cuántas de esas partes se toman. Su valor es el cociente $a : b$.

$$\frac{a}{b} = a : b \qquad (b \neq 0)$$

EJEMPLO:

$\frac{3}{4}$ significa dividir la unidad en 4 partes iguales y tomar 3 de ellas: vale $3 : 4 = 0{,}75$.
$\frac{5}{1} = 5$ y $\frac{0}{7} = 0$, pero $\frac{7}{0}$ no existe.

DEFINICIÓN

Fracción propia e impropia

Una fracción es **propia** si su numerador es menor que su denominador (vale menos que 1) e **impropia** si el numerador es mayor o igual que el denominador (vale 1 o más). Una fracción impropia se puede escribir como **número mixto**: entero más fracción propia, usando la división entera (cociente y resto).

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \quad \text{si } a = b \cdot c + r,\ 0 \le r < b$$

EJEMPLO:

$\frac{2}{5}$ es propia (vale $0{,}4$).
$\frac{17}{5}$ es impropia: $17 = 5 \cdot 3 + 2$, luego $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}$.

Fracciones equivalentes

DEFINICIÓN

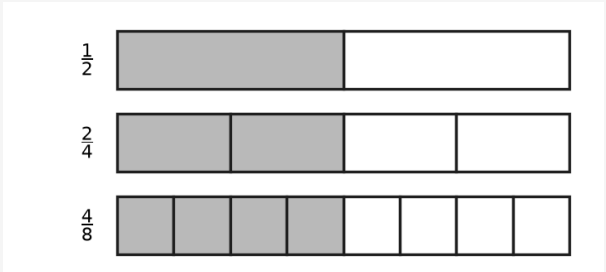
Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si representan el mismo número, es decir, si los productos cruzados coinciden. Comer $\frac{1}{2}$ de una pizza es lo mismo que comer $\frac{2}{4}$ o $\frac{4}{8}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = 0{,}5$ porque $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ y $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$.



PROPIEDAD

Amplificar una fracción

Amplificar es multiplicar numerador y denominador por el **mismo** número $k \neq 0$. Se obtiene una fracción equivalente con términos más grandes (porque $a \cdot (bk) = b \cdot (ak)$). Si solo se multiplica uno de los dos términos, la fracción cambia de valor.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad (k \neq 0)$$

EJEMPLO:

Fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$:
- $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$
- $\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$
- $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$

DEFINICIÓN

Simplificar una fracción

Simplificar es dividir numerador y denominador entre un divisor común $k \neq 0$. Se obtiene una fracción equivalente con términos más pequeños. Si se divide entre su **máximo común divisor**, se llega directamente a la fracción irreducible.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} \quad (k \neq 0)$$

EJEMPLO:

$\frac{12}{18}$: $\operatorname{mcd}(12, 18) = 6$, así que $\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$
- También por pasos: $\frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (dividiendo entre 2 y luego entre 3)

DEFINICIÓN

Fracción irreducible

Una fracción es **irreducible** cuando su numerador y su denominador no tienen más divisor común que 1, es decir, cuando $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$. Toda fracción es equivalente a una única fracción irreducible (con denominador positivo), que se obtiene dividiendo numerador y denominador entre su m.c.d.

$$\frac{a}{b} \text{ irreducible} \iff \text{m.c.d.}(a, b) = 1$$

EJEMPLO:

$\frac{6}{15}$ no es irreducible (m.c.d. $= 3$); $\frac{2}{5}$ sí lo es.

PROCEDIMIENTO

Comprobar si dos fracciones son equivalentes

Se aplica la definición de equivalencia: se multiplica **en cruz** y se comparan los dos productos. Si coinciden, las fracciones son equivalentes; si no, no lo son.

$$\tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO:

- $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$: $2 \cdot 15 = 30$ y $5 \cdot 6 = 30$ → **sí** son equivalentes
- $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$: $3 \cdot 8 = 24$ y $4 \cdot 5 = 20$ → **no** son equivalentes

PROCEDIMIENTO

Calcular el término que falta

Si sabemos que dos fracciones son equivalentes y falta un término, igualamos los productos cruzados y despejamos x.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d} \implies x = \frac{a \cdot d}{b}$$

EJEMPLO:

- $\frac{3}{4} = \frac{x}{20} \implies 4 \cdot x = 3 \cdot 20 \implies x = \frac{60}{4} = 15$
- $\frac{6}{x} = \frac{9}{12} \implies 9 \cdot x = 6 \cdot 12 \implies x = \frac{72}{9} = 8$

PROCEDIMIENTO

Reducir a común denominador

Para comparar, sumar o restar fracciones con distinto denominador, se sustituyen por fracciones equivalentes con el **mismo denominador**. Se toma como denominador común el $\mathrm{m.c.m.}$ de los denominadores (el menor posible).

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot (m : b)}{m} \qquad m = \mathrm{m.c.m.}(b, d)$$

EJEMPLO:

$\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$: $\mathrm{mcm}(3,4) = 12$

- $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$
- $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$

Como $8 < 9$, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

Suma y resta

PROPIEDAD

Suma (mismo denominador)

Se mantiene el denominador y se suman los numeradores.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

EJEMPLO:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

PROPIEDAD

Resta (mismo denominador)

Se mantiene el denominador y se restan los numeradores.

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

EJEMPLO:

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$$

PROCEDIMIENTO

Sumar (distinto denominador)

Pasos. 1) Se halla $m=\text{m.c.m.}(b,d)$. 2) Se divide m entre cada denominador y se multiplica por el numerador correspondiente. 3) Se suman los resultados sobre el denominador m y, si se puede, se simplifica.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(m:b)\cdot a+(m:d)\cdot c}{m}$$

EJEMPLO:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$$

PROCEDIMIENTO

Restar (distinto denominador)

Pasos. 1) Se halla $m = \text{m.c.m.}(b, d)$. 2) Se divide m entre cada denominador y se multiplica por el numerador correspondiente. 3) Se restan los resultados sobre el denominador m y, si se puede, se simplifica.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(m:b)\cdot a - (m:d)\cdot c}{m}$$

EJEMPLO:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

Multiplicación y división

DEFINICIÓN

Fracción inversa

La **fracción inversa** de $\frac{a}{b}$ (con $a \neq 0$) es $\frac{b}{a}$: la que resulta de intercambiar numerador y denominador. Es la fracción que, multiplicada por $\frac{a}{b}$, da 1. Se escribe con exponente -1. La fracción $\frac{0}{b}$ no tiene inversa.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

EJEMPLO:

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ y comprobamos que $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$.
La inversa de $5 = \frac{5}{1}$ es $\frac{1}{5}$.

PROPIEDAD

Multiplicación de fracciones

Se multiplica **en línea**: numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

EJEMPLO:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

PROPIEDAD

División de fracciones

Se multiplica por la **fracción inversa** del divisor (multiplicación en cruz).

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

EJEMPLO:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8}$$

Potencias de fracciones

DEFINICIÓN

Potencia de una fracción

Elevar una fracción a un exponente natural n es multiplicarla por sí misma n veces; el exponente afecta al numerador y al denominador. Un exponente negativo equivale a elevar la fracción inversa.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

EJEMPLO:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Conceptos adicionales

PROCEDIMIENTO

Fracción de una cantidad

Calcular la fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C es repartir C en b partes iguales y quedarse con a de ellas: se divide C entre el denominador y se multiplica por el numerador.

$$\tfrac{a}{b}\ \text{de}\ C = \tfrac{a\cdot C}{b}$$

EJEMPLO:

$$\tfrac{2}{3}\ \text{de}\ 15 = 2\cdot(15:3) = 10$$

Fracción generatriz

DEFINICIÓN

Fracción generatriz y tipos de decimales

Un número decimal **exacto** tiene un número finito de cifras decimales. Uno **periódico** tiene infinitas cifras decimales que, a partir de cierto lugar, repiten un mismo grupo de cifras llamado **periodo** (se marca con una barra encima). Si el periodo empieza justo después de la coma el decimal es **periódico puro**; si hay cifras entre la coma y el periodo (el **anteperiodo**) es **periódico mixto**.
La **fracción generatriz** de un decimal exacto o periódico es la fracción irreducible cuyo valor (el cociente numerador : denominador) es ese número. Todo decimal exacto o periódico tiene fracción generatriz y, recíprocamente, toda fracción da un decimal exacto o periódico.

EJEMPLO:

- Exacto: $0{,}75 = \frac{3}{4}$
- Periódico puro: $1{,}\overline{27} = 1{,}272727\ldots$ (periodo 27)
- Periódico mixto: $0{,}1\overline{6} = 0{,}16666\ldots$ (anteperiodo 1, periodo 6)

PROCEDIMIENTO

Decimal exacto

Escribimos el número sin la coma en el numerador y, en el denominador, un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales. Después simplificamos.

$$\text{Fracción} = \frac{\text{número sin coma}}{1 \text{ seguido de tantos ceros como decimales}}$$

EJEMPLO:

- $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
- $2{,}35 = \frac{235}{100} = \frac{47}{20}$

PROCEDIMIENTO

Decimal periódico puro

En el numerador restamos al número completo (sin coma, con el periodo una sola vez) su parte entera. En el denominador ponemos un 9 por cada cifra del periodo.

$$\text{Fracción} = \frac{\text{número sin coma} - \text{parte entera}}{\text{tantos 9 como cifras tiene el periodo}}$$

EJEMPLO:

- $0{,}\overline{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- $1{,}\overline{27} = \frac{127-1}{99} = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

PROCEDIMIENTO

Decimal periódico mixto

En el numerador restamos al número completo la parte que **no** se repite (parte entera y anteperiodo). En el denominador ponemos primero un 9 por cada cifra del periodo y después un 0 por cada cifra del anteperiodo.
Error típico: poner los ceros delante de los nueves (09 en vez de 90).

$$\text{Fracción} = \frac{\text{número sin coma} - \text{parte no periódica}}{\text{tantos 9 como cifras del periodo y tantos 0 como del anteperiodo}}$$

EJEMPLO:

- $0{,}1\overline{6} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$
- $2{,}3\overline{45} = \frac{2345-23}{990} = \frac{2322}{990} = \frac{129}{55}$

OBSERVACIÓN

¿Por qué funciona la regla?

Llamamos x al decimal y lo multiplicamos por potencias de 10 hasta tener dos números con **la misma parte decimal**. Al restarlos, los decimales infinitos desaparecen y queda una ecuación sencilla.

EJEMPLO:

$x = 0{,}1\overline{6}$

- $100x = 16{,}666\ldots$
- $10x = 1{,}666\ldots$

Restando: $100x - 10x = 16 - 1 \implies 90x = 15 \implies x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Comprobación: $1 : 6 = 0{,}1666\ldots$ ✓

RESUMEN

1. Operaciones con fracciones

Fracciones equivalentes

Se obtienen amplificando o simplificando (multiplicando o dividiendo arriba y abajo por el mismo número). Irreducible: m.c.d.$(a,b)=1$.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff a\cdot d=b\cdot c$$

Suma y resta

Se reducen a común denominador con el m.c.m. de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{(m:b)\cdot a\pm(m:d)\cdot c}{m} \qquad m=\text{m.c.m.}(b,d)$$

Producto y cociente

Dividir es multiplicar por la inversa.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Potencias

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Fracción de una cantidad

$$\frac{a}{b}\text{ de }C=\frac{a\cdot C}{b}$$

Fracción generatriz

• Exacto: número sin coma entre 1 seguido de tantos ceros como decimales.
• Periódico puro: (número sin coma - parte entera) entre tantos 9 como cifras del periodo.
• Periódico mixto: (número sin coma - parte no periódica) entre tantos 9 como cifras del periodo y tantos 0 como del anteperiodo.

$$1{,}25=\frac{125}{100} \qquad 2{,}\overline{3}=\frac{23-2}{9} \qquad 1{,}2\overline{3}=\frac{123-12}{90}$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

F

Fracción DEFINICIÓN 3
Fracción generatriz y tipos de decimales DEFINICIÓN 12
Fracción inversa DEFINICIÓN 9
Fracción irreducible DEFINICIÓN 6
Fracción propia e impropia DEFINICIÓN 4
Fracciones equivalentes DEFINICIÓN 4

P

Potencia de una fracción DEFINICIÓN 11

S

Simplificar una fracción DEFINICIÓN 5