ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES, LÍMITES Y DERIVADAS

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Funciones 3

Definición de función 3
Monotonía y curvatura 5
Máximos y mínimos 8
Puntos de corte con los ejes 11
Signo de la función 12
Simetría 14
Periodicidad 16
Composición de funciones 17
Función inversa 17

2. Funciones elementales 19

Funciones polinómicas 20
Funciones racionales 23
Funciones radicales 24
Funciones exponenciales 26
Funciones logarítmicas 27

3. Límites y continuidad 29

Concepto de límite 30
Cálculo de límites 34
Indeterminaciones 34
Asíntotas de una función 37
Continuidad y discontinuidad 40

4. Derivadas 44

Concepto de derivada 45
Reglas de derivación 46
Tabla de derivadas 49
Recta tangente 50
Monotonía y extremos relativos 50
Curvatura y puntos de inflexión 52
Optimización 53

Resumen 54

Índice de conceptos 58

TEMA 1

FUNCIONES

Introducción al concepto de función: dominio, recorrido, monotonía, curvatura, máximos y mínimos, puntos de corte, signo, simetría, periodicidad, composición y función inversa.

Definición de función

DEFINICIÓN

Función

Una **función** real de variable real f es una regla que asigna a cada número x de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ (el **dominio**) **un único** número real $f(x)$, llamado la **imagen** de x. Se escribe $f : A \to \mathbb{R}$ o $y = f(x)$; x es la variable independiente e y la dependiente. Si a algún x le correspondieran dos valores, no sería una función (por eso una circunferencia no es la gráfica de una función).

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto y = f(x), \qquad \text{un único } y \text{ para cada } x \in A$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = 2x + 1$ asigna a cada valor de x un valor único de $f(x)$. Por ejemplo: $f(3) = 7$, $f(0) = 1$, $f(-2) = -3$.

DEFINICIÓN

Dominio

El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores de entrada para los cuales la función está definida. Al calcular el dominio hay que excluir los valores que hacen que la expresión sea indefinida: denominadores nulos, raíces de negativos, etc.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ está definida} \,\}$$

EJEMPLO:

Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque no se puede dividir por cero. Para $g(x) = \sqrt{x}$, el dominio es $[0, +\infty)$ porque no existe la raíz cuadrada de números negativos en $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN

Recorrido (imagen)

El **recorrido** o imagen de f es el conjunto de todos los valores que f toma: los números y tales que $y = f(x)$ para algún x del dominio.

$$\mathrm{Im}(f) = \{\, f(x) : x \in \mathrm{Dom}(f) \,\}$$

EJEMPLO:

Para $f(x) = x^2$, el recorrido es $[0, +\infty)$ ya que los cuadrados son siempre no negativos. Para $f(x) = \sin(x)$, el recorrido es $[-1, 1]$.

Monotonía y curvatura

DEFINICIÓN

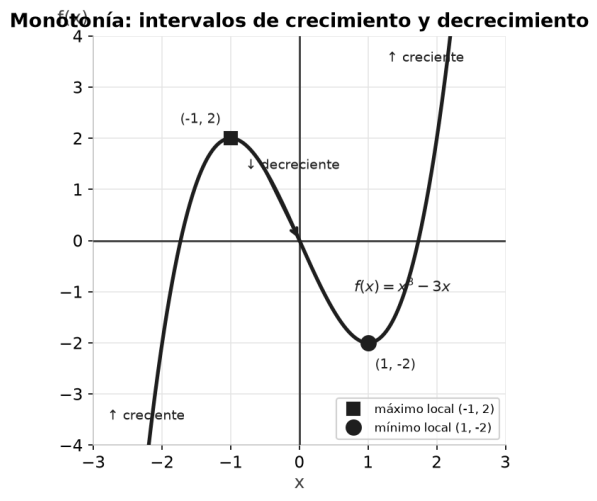
Monotonía

Sea f una función e I un intervalo contenido en su dominio. f es **creciente** en I si a mayor x le corresponde mayor (o igual) $f(x)$, y **decreciente** si a mayor x le corresponde menor (o igual) $f(x)$. Si las desigualdades son estrictas se dice **estrictamente** creciente o decreciente. Es **constante** si $f(x)$ no varía. (Con derivadas se estudia en el tema de derivadas.)

$$\text{creciente en } I:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \text{decreciente en } I:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in I)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^3 - 3x$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y decreciente en $(-1, 1)$.



Intervalos de crecimiento y decrecimiento

DEFINICIÓN

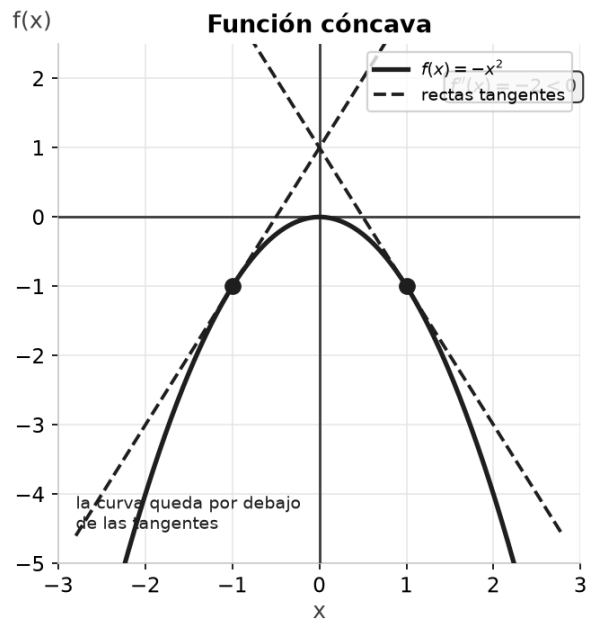
Función cóncava

Una función es **cóncava** $(\cap)$ en un intervalo si, al unir dos puntos cualesquiera de su gráfica con un segmento (recta secante), la gráfica queda *por encima* del segmento. Tiene forma de montaña. Equivalentemente, su segunda derivada es negativa: $f''(x) < 0$.

f cóncava $(\cap)$ en $I \iff$ la gráfica queda por encima de cada secante

EJEMPLO:

La función $f(x) = -x^2$ es cóncava en todo $\mathbb{R}$, ya que $f''(x) = -2 < 0$. Las líneas tangentes quedan por encima de la curva.



$f(x) = -x^2$ es cóncava: la curva queda bajo sus tangentes

DEFINICIÓN

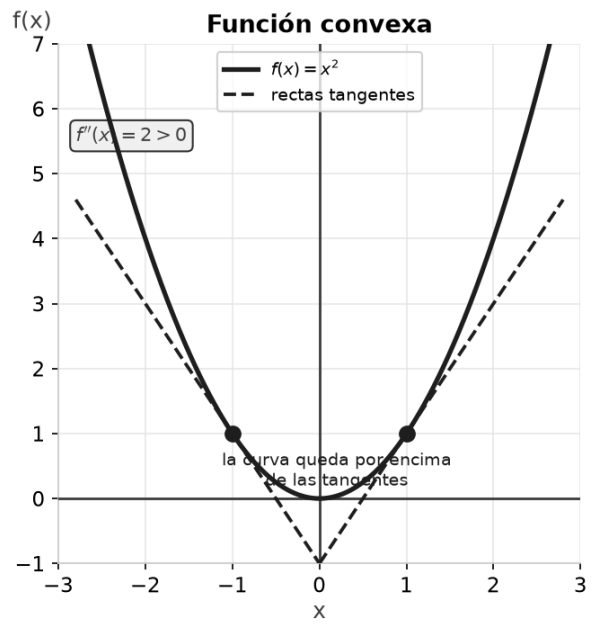
Función convexa

Una función es **convexa** $(\cup)$ en un intervalo si, al unir dos puntos cualesquiera de su gráfica con un segmento (recta secante), la gráfica queda *por debajo* del segmento. Tiene forma de valle, como la parábola $y = x^2$. Equivalentemente, su segunda derivada es positiva: $f''(x) > 0$.

f convexa $(\cup)$ en $I \iff$ la gráfica queda por debajo de cada secante

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^2$ es convexa en todo $\mathbb{R}$, ya que $f''(x) = 2 > 0$. Las líneas tangentes quedan por debajo de la curva.



$f(x) = x^2$ es convexa: la curva queda sobre sus tangentes

DEFINICIÓN

Punto de inflexión

Un **punto de inflexión** es un punto donde la función cambia de cóncava a convexa (o viceversa). En él la segunda derivada se anula, $f''(x) = 0$, pero esto no basta: además f'' tiene que cambiar de signo. Por ejemplo, $f(x) = x^4$ cumple $f''(0) = 0$ y no tiene punto de inflexión en $x = 0$.

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^3$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$, ya que $f''(x) = 6x = 0$ en $x = 0$ y la curvatura cambia de cóncava (para $x < 0$) a convexa (para $x > 0$).

Máximos y mínimos

DEFINICIÓN

Máximo relativo

Un punto $x = a$ es un **máximo relativo** si $f(a) \geq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a a: es un pico local. Si f es derivable en a y tiene en él un máximo relativo, entonces $f'(a) = 0$ (condición necesaria); y si además $f''(a) < 0$, es seguro que hay máximo (condición suficiente).

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^3 - 3x$ tiene un máximo relativo en $x = -1$, con $f(-1) = 2$. En este punto $f'(-1) = 0$ y $f''(-1) = -6 < 0$.

DEFINICIÓN

Mínimo relativo

Un punto $x = a$ es un **mínimo relativo** si $f(a) \leq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a a: es un valle local. Si f es derivable en a y tiene en él un mínimo relativo, entonces $f'(a) = 0$ (condición necesaria); y si además $f''(a) > 0$, es seguro que hay mínimo (condición suficiente).

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^3 - 3x$ tiene un mínimo relativo en $x = 1$, con $f(1) = -2$. En este punto $f'(1) = 0$ y $f''(1) = 6 > 0$.

DEFINICIÓN

Máximo absoluto

Una función tiene un **máximo absoluto** en $x = a$ si $f(a)$ es el **mayor valor** que toma en todo su dominio. Puede no existir si la función no está acotada superiormente.

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = -x^2 + 4$ tiene un máximo absoluto en $x = 0$, con $f(0) = 4$, ya que $-x^2 + 4 \leq 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN

Mínimo absoluto

Una función tiene un **mínimo absoluto** en $x = a$ si $f(a)$ es el **menor valor** que toma en todo su dominio. Puede no existir si la función no está acotada inferiormente.

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$, con $f(0) = 0$, ya que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes

PROCEDIMIENTO

Cortes con los ejes X e Y

Son los puntos donde la gráfica cruza los ejes cartesianos.

• **Eje Y**: Se calcula haciendo $x = 0$, dando lugar al punto $(0, f(0))$. Solo puede haber uno como máximo.

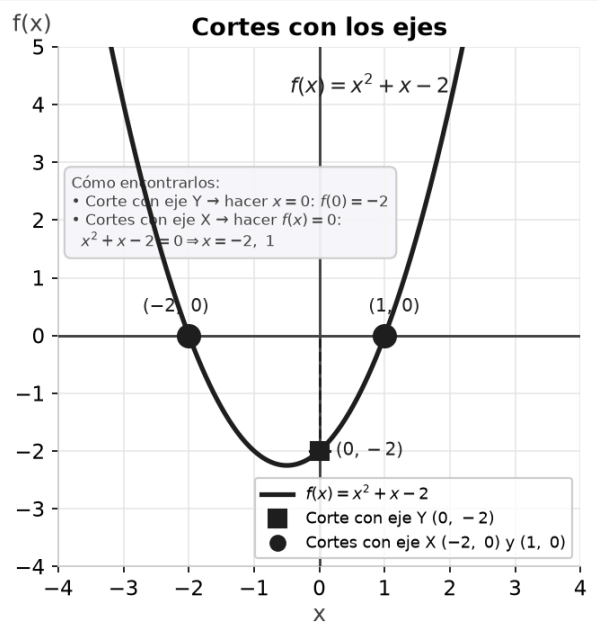
• **Eje X (Ceros)**: Se hallan resolviendo $f(x) = 0$. Puede haber ninguno, uno o varios puntos.

EJEMPLO:

Para $f(x) = x^2 + x - 2$:

• **Corte Y**: $f(0) = -2 \Rightarrow (0, -2)$.

• **Cortes X**: $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 1 \Rightarrow (-2, 0)$ y $(1, 0)$.



Puntos de corte de $f(x) = x^2 + x - 2$

Signo de la función

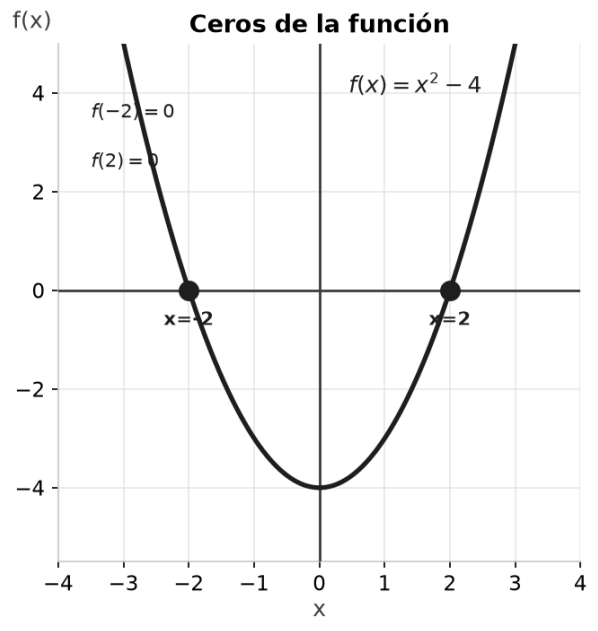
DEFINICIÓN

Ceros de una función

Los **ceros** (o raíces) de una función son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Geométricamente son los puntos donde la gráfica corta al eje X. Son el punto de partida para estudiar el signo de la función.

EJEMPLO:

Los ceros de $f(x) = x^2 - 4$ son $x = -2$ y $x = 2$, ya que $(-2)^2 - 4 = 0$ y $2^2 - 4 = 0$.



Ceros de $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$ y $x = 2$

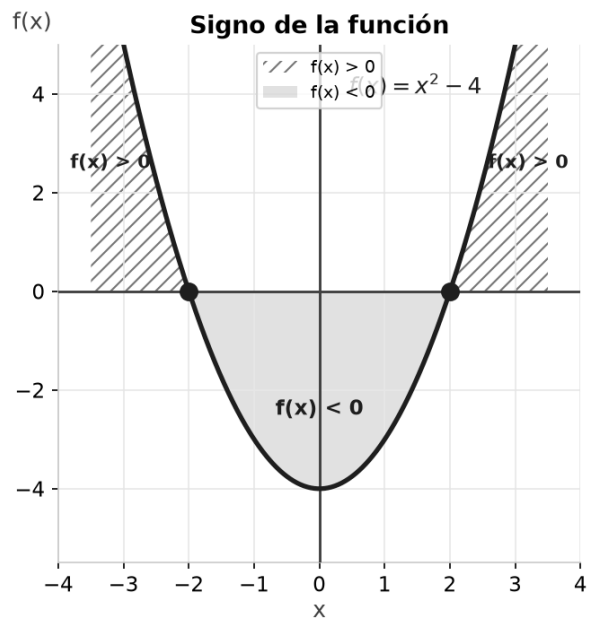
DEFINICIÓN

Signo de la función

El **signo** de una función indica en qué intervalos la función toma valores positivos ($f(x) > 0$, la gráfica está *por encima* del eje X) y en cuáles valores negativos ($f(x) < 0$, la gráfica está *por debajo*). Los ceros marcan los cambios de signo.

EJEMPLO:

Para $f(x) = x^2 - 4$, los ceros son $x = \pm 2$. La función es **negativa** en $(-2, 2)$, ya que la parábola queda bajo el eje X, y **positiva** en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.



Zonas positiva y negativa de $f(x) = x^2 - 4$

Simetría

DEFINICIÓN

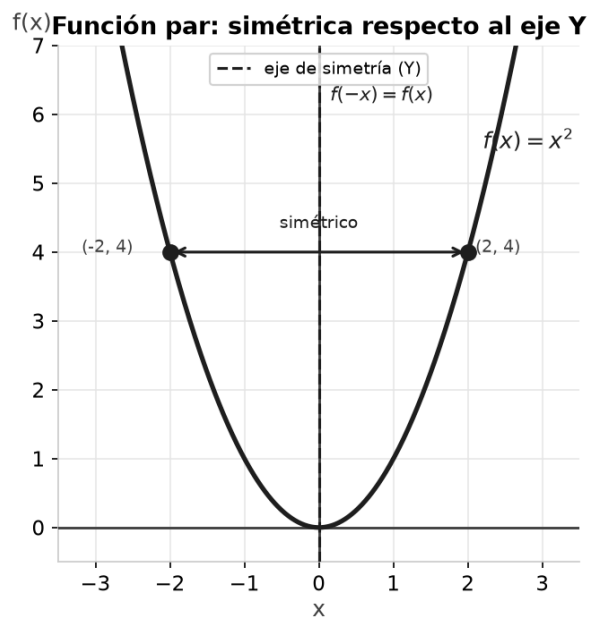
Función par

Una función es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio. Su gráfica es simétrica respecto al *eje Y*. Para comprobar si una función es par: sustituir x por $-x$ y verificar que se obtiene la misma expresión.

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^2$ es par: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Otros ejemplos: $\cos(x)$, $|x|$, x^4.



$f(x) = x^2$ es par: simétrica respecto al eje Y

DEFINICIÓN

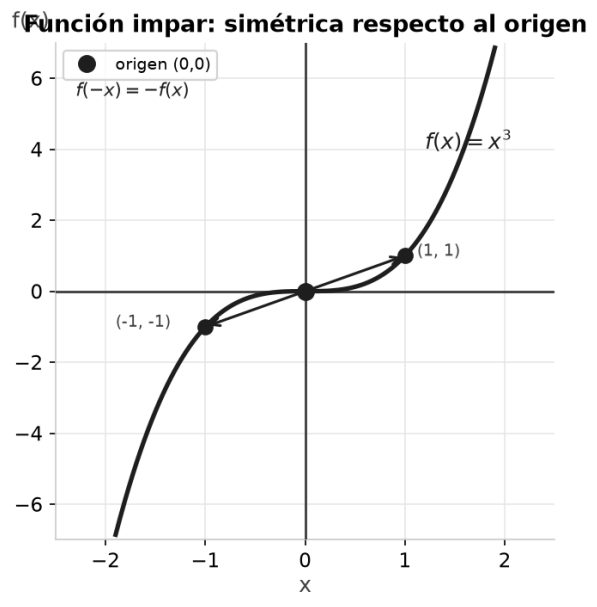
Función impar

Una función es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en su dominio. Su gráfica es simétrica respecto al *origen* de coordenadas. Nota: toda función impar verifica que $f(0) = 0$ (si 0 está en su dominio).

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^3$ es impar: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Otros ejemplos: $\sin(x)$, x, x^5.



$f(x) = x^3$ es impar: simétrica respecto al origen

OBSERVACIÓN

Función sin simetría

Una función que **no es ni par ni impar** no tiene simetría especial. La mayoría de las funciones son de este tipo. Para determinarlo basta comprobar que no se cumple ni $f(-x) = f(x)$ ni $f(-x) = -f(x)$.

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^2 + x$ no tiene simetría: $f(-x) = x^2 - x$, que no es igual a $f(x) = x^2 + x$ ni a $-f(x) = -x^2 - x$.

Periodicidad

DEFINICIÓN

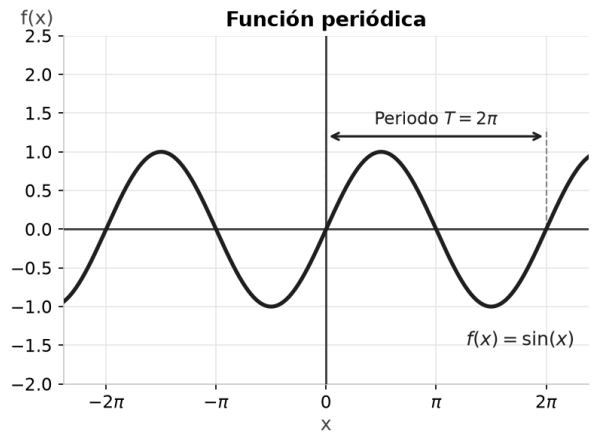
Función periódica

Una función es **periódica** si existe un número $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo x del dominio (y $x+T$ también está en él). El menor T con esa propiedad se llama **periodo** de la función. Su gráfica se repite cada T unidades. Las funciones trigonométricas son los ejemplos más clásicos.

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

EJEMPLO:

La función senoidal $f(x) = \sin(x)$ es periódica con un periodo de $T = 2\pi$. Esto significa que su forma gráfica (la onda periódica) es exactamente igual cada 2π unidades.



$f(x) = \sin(x)$ es periódica de periodo $T = 2\pi$

Composición de funciones

DEFINICIÓN

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, la **composición** $g \circ f$ (se lee «f seguida de g») es la función que aplica primero f y después g al resultado. Su dominio está formado por los x del dominio de f cuya imagen $f(x)$ está en el dominio de g. El orden importa: en general $g \circ f \neq f \circ g$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

EJEMPLO:

Sean $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$.

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3$.

Función inversa

DEFINICIÓN

Función inversa

Una función f es **inyectiva** si a valores distintos de x les corresponden valores distintos de $f(x)$. Si f es inyectiva, su **función inversa** f^{-1} es la que cumple $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$: «deshace» la acción de f, y su dominio es el recorrido de f. Gráficamente, f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

EJEMPLO:

Para $f(x) = 2x - 3$, su inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

Si calculamos $f(5) = 7$, entonces $f^{-1}(7) = \dfrac{7+3}{2} = 5$.

PROCEDIMIENTO

Cálculo de la función inversa

Para calcular la inversa de una función $f(x)$ seguimos estos pasos:
① Sustituimos $f(x)$ por y.
② Intercambiamos todas las x por y y viceversa.
③ Despejamos la nueva variable y.
④ La expresión final es $f^{-1}(x)$.

EJEMPLO:

Calcular la inversa de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$:
1. $x = \dfrac{2y+1}{y-3}$ (tras intercambiar variables)
2. $x(y-3) = 2y+1 \Rightarrow xy - 3x = 2y+1$
3. $xy - 2y = 3x+1 \Rightarrow y(x-2) = 3x+1$
4. $y = \dfrac{3x+1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

PROPIEDAD

Composición con la inversa

Una propiedad fundamental de la función inversa es que al componer una función con su inversa, el resultado es la **función identidad** $I(x) = x$. Esto se cumple en ambos órdenes: $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

EJEMPLO:

Usando $f(x) = 2x - 3$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$:
$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = 2\left(\dfrac{x+3}{2}\right) - 3 = (x+3) - 3 = x$.

TEMA 2

FUNCIONES ELEMENTALES

Estudio de los tipos básicos de funciones: polinómicas, racionales, radicales, exponenciales y logarítmicas.

Funciones polinómicas

DEFINICIÓN

Función afín y función lineal

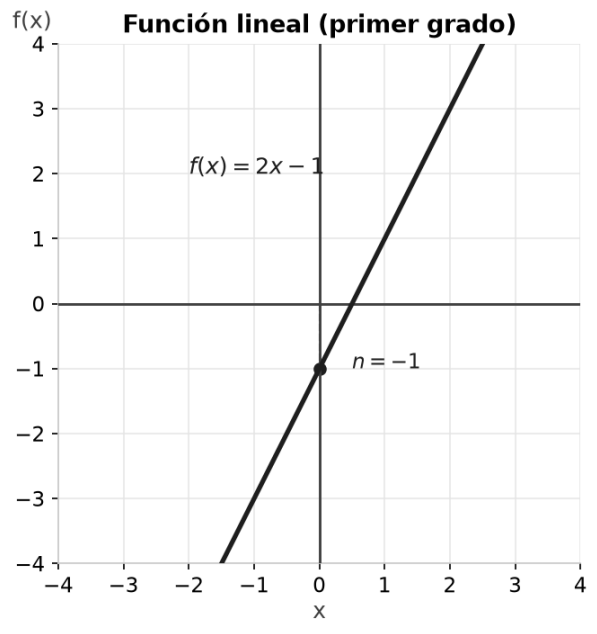
Una función **afín** es una función de la forma $f(x) = mx + n$, con m y n números reales. Su gráfica es una **recta**: m es la **pendiente** (lo que varía f al aumentar x una unidad) y n la **ordenada en el origen** (corte con el eje Y). Si $n = 0$ se llama **lineal** y su gráfica pasa por el origen. Si $m > 0$ es creciente, si $m < 0$ decreciente y si $m = 0$ es constante.

Dominio: $\mathbb{R}$. **Recorrido:** $\mathbb{R}$ si $m \neq 0$; si $m = 0$ es solo $\{n\}$.

$$f(x) = mx + n \qquad m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = 2x - 1$ tiene pendiente $m = 2$ y corta al eje Y en $n = -1$.



Gráfica de $f(x) = 2x - 1$

DEFINICIÓN

Función cuadrática

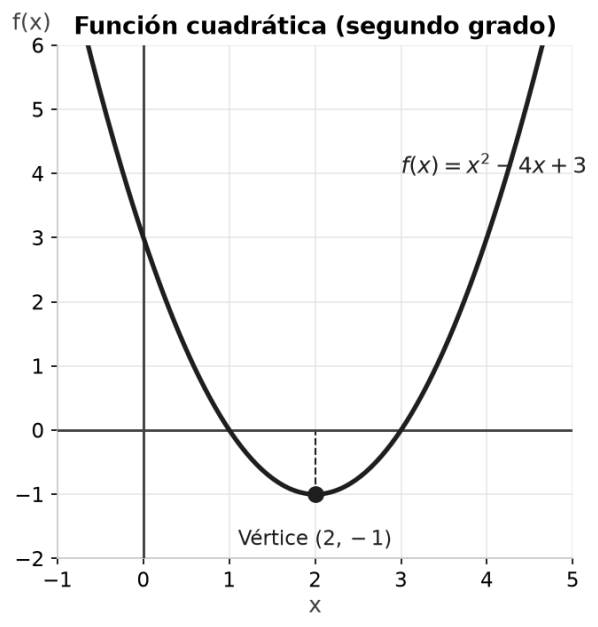
Una función **cuadrática** es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Su gráfica es una **parábola** con eje vertical y **vértice** en $x_v = -\dfrac{b}{2a}$. Si $a > 0$ tiene forma de U (el vértice es el mínimo) y si $a < 0$ de montaña (el vértice es el máximo).

Dominio: $\mathbb{R}$. **Recorrido:** $[f(x_v), +\infty)$ si $a > 0$ y $(-\infty, f(x_v)]$ si $a < 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \qquad x_v = -\frac{b}{2a}$$

EJEMPLO:

Consideremos $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Su vértice está en $x_v = \frac{4}{2} = 2$. Evaluando, obtenemos $f(2) = -1$.



Gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 3$

PROPIEDAD

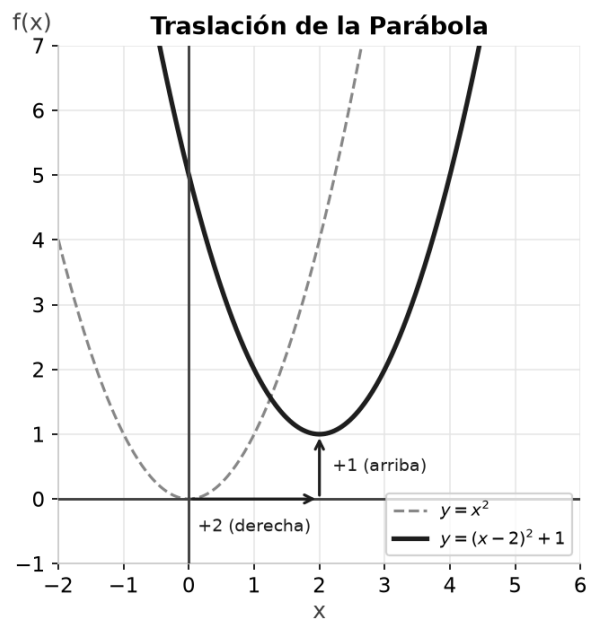
Traslaciones de la parábola

Si se conoce la gráfica de f, la de $g(x) = f(x-h)+k$ es la misma gráfica **trasladada**: h unidades horizontalmente (a la derecha si $h>0$, a la izquierda si $h<0$) y k unidades verticalmente (hacia arriba si $k>0$, hacia abajo si $k<0$). Aplicado a $f(x)=ax^2$ da la **forma canónica** de la parábola, cuyo vértice es (h,k).

$$g(x) = a(x-h)^2 + k \qquad \text{vértice } (h,k)$$

EJEMPLO:

La función $g(x)=(x-2)^2+1$ es la parábola x^2 desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.



Comparativa entre x^2 y $(x-2)^2+1$

Funciones racionales

DEFINICIÓN

Función racional

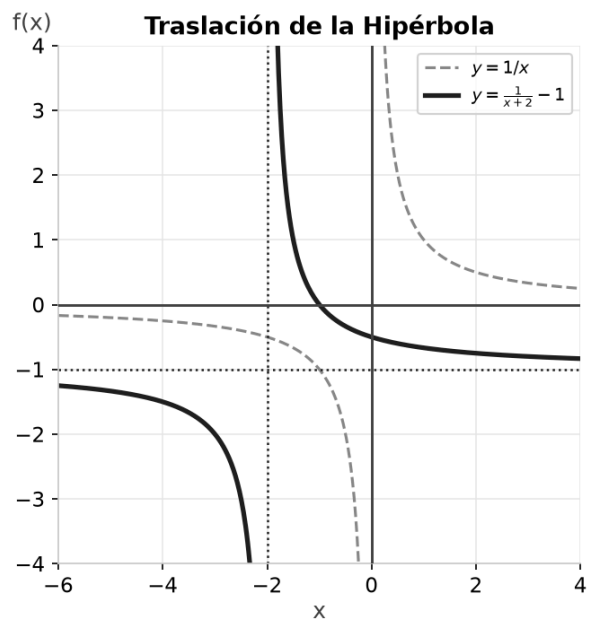
Una función **racional** es un cociente de polinomios, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con Q no nulo.

Dominio: $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador. En un cero de Q que no se anula también en P, la gráfica tiene una asíntota vertical. **Recorrido:** depende de cada función y se estudia caso por caso; la gráfica no corta a sus asíntotas horizontales en el infinito, aunque a veces sí las atraviesa en valores finitos. El ejemplo básico es la hipérbola $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con dominio y recorrido $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \mathrm{Dom}(f) = \{x : Q(x) \neq 0\}$$

EJEMPLO:

Para $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$, la gráfica de la hipérbola base se ha trasladado 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.



Traslación de $1/x$ a $\frac{1}{x+2} - 1$

Funciones radicales

DEFINICIÓN

Función radical

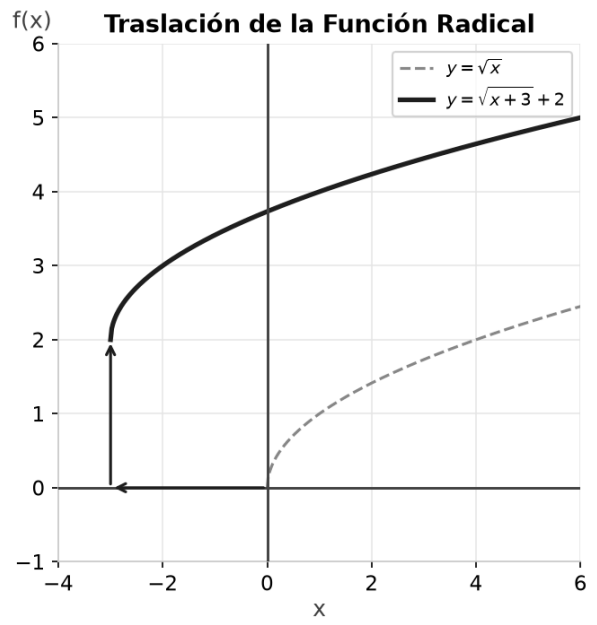
Una función **radical** es una función en la que la variable aparece dentro de una raíz, como $f(x) = \sqrt{x}$.

Dominio: si el índice es par, el radicando debe ser mayor o igual que 0; si es impar, no hay restricción por la raíz. **Recorrido:** una raíz de índice par es siempre mayor o igual que 0, por lo que $\sqrt{x}$ tiene recorrido $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \qquad n \text{ par} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \{x : g(x) \geq 0\}$$

EJEMPLO:

Para la función $f(x) = \sqrt{x+3} + 2$, la curva básica $\sqrt{x}$ se desplaza 3 unidades a la izquierda y 2 hacia arriba. El dominio es $[-3, +\infty)$.



Traslación de $\sqrt{x}$ a $\sqrt{x+3}+2$

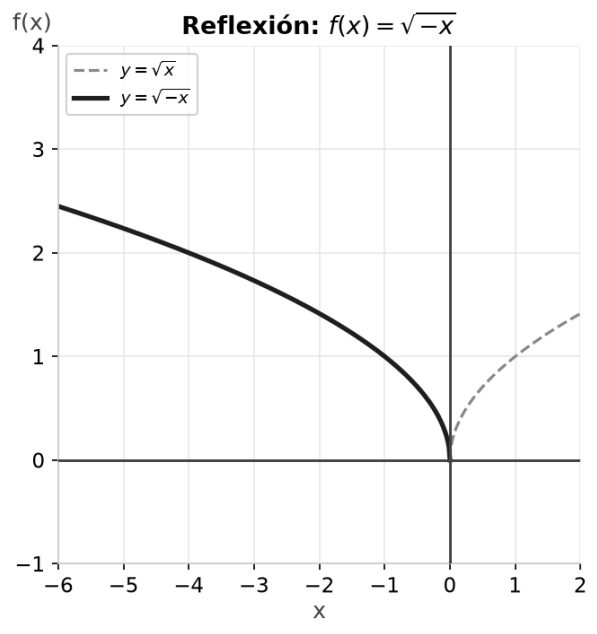
PROPIEDAD

Reflexión en el eje Y

La gráfica de $g(x) = f(-x)$ es la de f **reflejada respecto del eje** Y. Para la raíz, $f(x) = \sqrt{-x}$ tiene dominio $(-\infty, 0]$ porque exige $-x \geq 0$.

EJEMPLO:

Para $f(x) = \sqrt{-x}$, el dominio cambia a $(-\infty, 0]$, ya que lo de dentro debe ser positivo $(-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0)$.



Comparativa entre $\sqrt{x}$ y $\sqrt{-x}$

Funciones exponenciales

DEFINICIÓN

Función exponencial

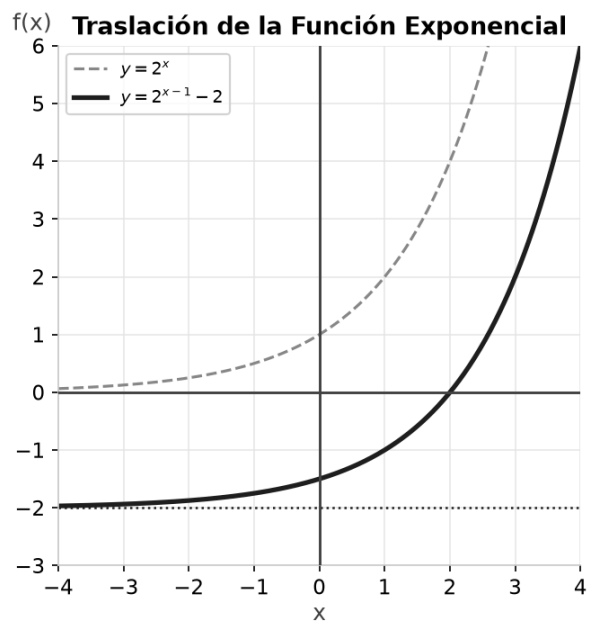
Una función **exponencial** tiene la forma $f(x) = a^x$, con base $a > 0$ y $a \neq 1$.

Dominio: $\mathbb{R}$. **Recorrido:** $(0, +\infty)$: una potencia de base positiva nunca es cero ni negativa. Pasa por $(0, 1)$ y tiene la recta $y = 0$ como **asíntota horizontal**. Si $a > 1$ es creciente; si $0 < a < 1$, decreciente. Al trasladarla, $g(x) = a^{x-h} + k$ tiene asíntota $y = k$ y recorrido $(k, +\infty)$.

$$f(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

EJEMPLO:

Si trasladamos $f(x) = 2^x$ para obtener $g(x) = 2^{x-1} - 2$, la gráfica se mueve 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia abajo. La asíntota pasa de $y = 0$ a $y = -2$.



Traslación de 2^x a $2^{x-1} - 2$

Funciones logarítmicas

DEFINICIÓN

Función logarítmica

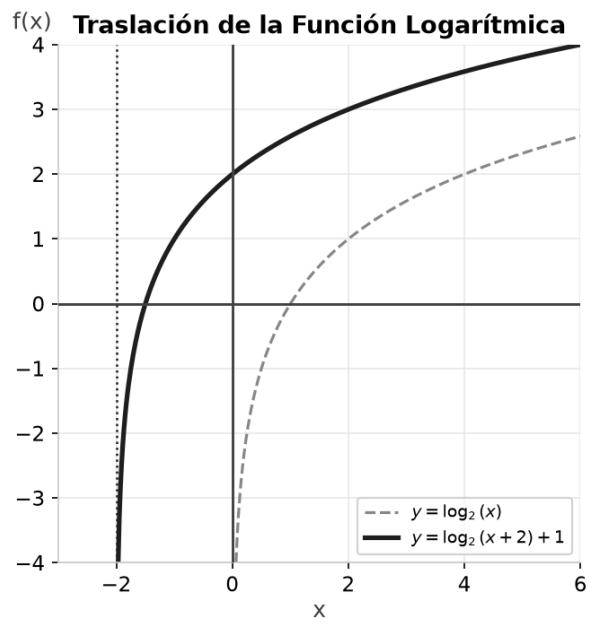
Una función **logarítmica** tiene la forma $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Es la **inversa** de la exponencial de la misma base: $y = \log_a x \iff a^y = x$.

Dominio: $(0, +\infty)$ (el argumento debe ser positivo). **Recorrido:** $\mathbb{R}$. Pasa por $(1, 0)$ y tiene la recta $x = 0$ como **asíntota vertical**. Si $a > 1$ es creciente.

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1) \qquad y = \log_a x \iff a^y = x$$

EJEMPLO:

Para $f(x) = \log_2(x + 2) + 1$, la gráfica básica se desplaza 2 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia arriba. La asíntota vertical se mueve a $x = -2$.



Traslación de $\log_2(x)$ a $\log_2(x + 2) + 1$

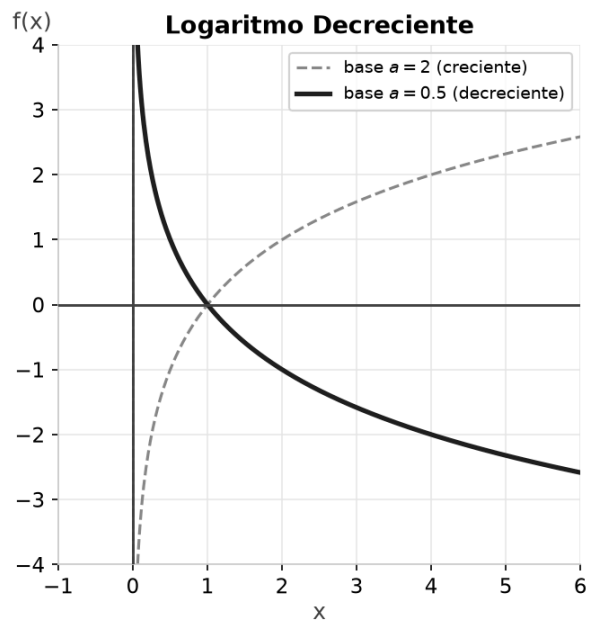
PROPIEDAD

Logaritmos de base fraccionaria

Cuando la base está entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$, la función logarítmica es **decreciente**. *Razón:* $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ y, si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$, de modo que se invierte el sentido de la desigualdad.

EJEMPLO:

La función $f(x) = \log_{0,5}(x)$ decrece a medida que x aumenta. Corta al eje X en $(1, 0)$ y tiene una asíntota vertical en $x = 0$.



Comparativa: base $a = 2$ vs base $a = 0{,}5$

TEMA 3

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Estudio del límite de una función, resolución de indeterminaciones, asíntotas cartesianas y tipos de discontinuidad.

Concepto de límite

DEFINICIÓN

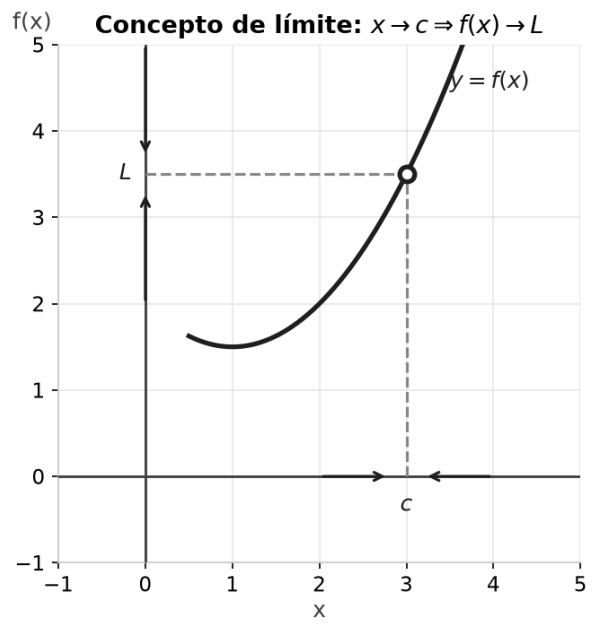
Límite de una función en un punto

Sea f una función y c un número real. Se dice que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, y se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = L$, cuando $f(x)$ se acerca tanto como se quiera a L al tomar x suficientemente cerca de c (con $x \neq c$). No hace falta que f esté definida en c: el límite depende de lo que ocurre **cerca** de c, no en c. De forma rigurosa (definición de Cauchy): para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

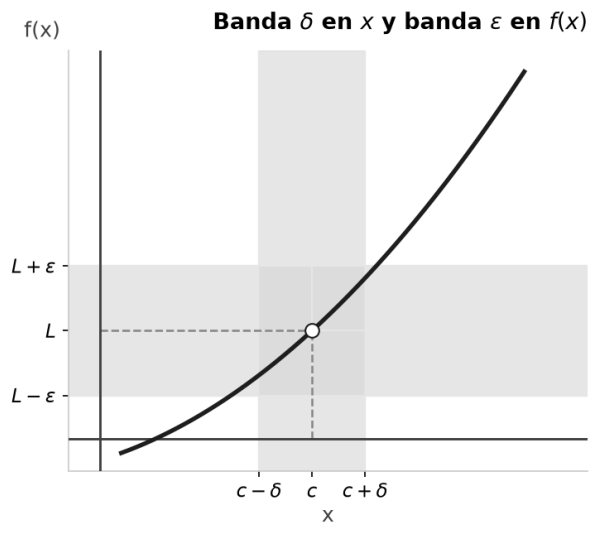
$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

EJEMPLO:

Si observamos la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, no está definida en $x = 2$. Sin embargo, notamos que al acercarnos a $x = 2$, el valor de $f(x)$ se acerca a 4. Por tanto, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.



Cuando $x \to c$, $f(x) \to L$



DEFINICIÓN

Límites laterales

El **límite por la izquierda**, $\lim_{x\to c^-} f(x)$, es el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x tiende a c con $x < c$; el **límite por la derecha**, $\lim_{x\to c^+} f(x)$, cuando $x > c$. El límite $\lim_{x\to c} f(x)$ existe si y solo si existen los dos límites laterales y son iguales.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

EJEMPLO:

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ cerca de 0: por la derecha $f(x) = 1$ y por la izquierda $f(x) = -1$. Los límites laterales son distintos, luego $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

DEFINICIÓN

Límites infinitos y límites en el infinito

Se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$) cuando $f(x)$ se hace tan grande (o tan negativo) como se quiera al acercarse x a c. Se escribe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ cuando $f(x)$ se acerca a L al hacerse x tan grande como se quiera. El símbolo ∞ no es un número: indica un comportamiento.

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Cálculo de límites

PROPIEDAD

Álgebra de límites

Si $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$ son números reales, el límite de una suma, una diferencia, un producto o un cociente (con $L_2 \neq 0$) es la suma, diferencia, producto o cociente de los límites. Por tanto, para **funciones continuas** (polinomios, racionales en su dominio, exponenciales, etc.) basta **sustituir** x por c.

$$\lim(f \pm g) = L_1 \pm L_2 \quad \lim(f \cdot g) = L_1 \cdot L_2 \quad \lim \frac{f}{g} = \frac{L_1}{L_2}\ (L_2 \neq 0)$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x) = 4 + 6 = 10 \qquad \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Indeterminaciones

DEFINICIÓN

Indeterminación

Una **indeterminación** es una expresión del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0 o 0^0 que aparece al sustituir en el límite y **no determina por sí sola** el valor del límite: según las funciones el límite puede valer cualquier número, $\pm\infty$ o no existir. Hay que transformar la expresión para **resolverla**.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$$

EJEMPLO:

Tanto $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x}$ como $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$ son del tipo $\frac{0}{0}$, pero valen 2 y 0 respectivamente. Por eso $\frac{0}{0}$ no es un número.

PROCEDIMIENTO

Infinito entre infinito ($\frac{\infty}{\infty}$)

Aparece comúnmente en el cálculo de límites de funciones racionales (cociente de dos polinomios) cuando $x \to \pm\infty$. Para resolverla, se comparan los **grados** de los polinomios del numerador y del denominador. Alternativamente, se puede aplicar la Regla de L'Hôpital.

EJEMPLO:

- Si el grado del numerador es mayor: el límite es $\pm\infty$. Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty$.
- Si el grado del denominador es mayor: el límite es 0. Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2+1} = 0$.
- Si los grados son iguales: se dividen los coeficientes principales. Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-x} = \frac{2}{3}$.

PROCEDIMIENTO

Cero entre cero ($\frac{0}{0}$)

Se presenta al calcular un límite puntual, $\lim_{x\to a}$, obteniendo que tanto el numerador como el denominador se anulan simultáneamente. Para evitarla, generalmente se debe **factorizar** el numerador y el denominador (usando Ruffini o resolviendo ecuaciones de segundo grado) y simplificar el factor $(x-a)$ que se repite. También se puede usar L'Hôpital.

EJEMPLO:

Para resolver $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$:
Al sustituir $x=1$ queda $\frac{0}{0}$. Factorizamos el numerador: $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$.
Simplificamos el factor común $(x-1)$ y nos queda $\lim_{x\to 1}(x+1)$. Ahora sustituimos otra vez $x=1$ y obtenemos el resultado: $1+1=2$.

PROCEDIMIENTO

Infinito menos infinito ($\infty - \infty$)

Ocurre en restas de polinomios, fracciones o raíces donde ambos términos tienden a infinito.

- **Con sumas de fracciones:** Operar (hacer múltiplo común) para obtener un solo cociente y pasar a $\frac{\infty}{\infty}$.
- **Con raíces cuadradas:** Multiplicar y dividir por el **conjugado** de la expresión.

EJEMPLO:

Sea $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$. Da $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos por su conjugado $(\sqrt{x^2+x}+x)$:
$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$ = $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$ = $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$. Ahora la indeterminación es $\frac{\infty}{\infty}$ y da $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

PROCEDIMIENTO

Uno elevado a infinito (1^∞)

Suele aparecer al relacionar el límite con el número e, definido como $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Para resolverla en funciones $f(x)^{g(x)}$ se aplica una fórmula simplificada: $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\cdot(f(x)-1)}$.

EJEMPLO:

Cálculo de $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$. Al sustituir da 1^∞.
Aplicando la fórmula: $e^{\lim_{x\to\infty}x\cdot(\frac{x+1}{x}-1)}$. Restamos el paréntesis: $\frac{x+1}{x}-1=\frac{x+1-x}{x}=\frac{1}{x}$.
El límite en el exponente es $\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1$. Por tanto, el resultado final es $e^1=e$.

Asíntotas de una función

DEFINICIÓN

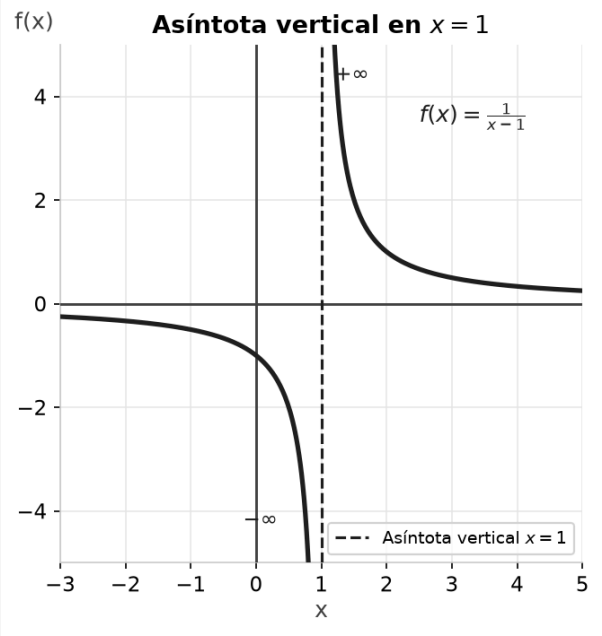
Asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de f si al menos uno de los límites laterales en a es infinito. La gráfica se acerca indefinidamente a esa recta. Se buscan en los puntos donde el denominador se anula y no se puede simplificar.

$$x = a \text{ asíntota vertical} \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$ porque los límites laterales cuando $x \to 1$ son infinitos. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.



Asíntota vertical en $x = 1$

DEFINICIÓN

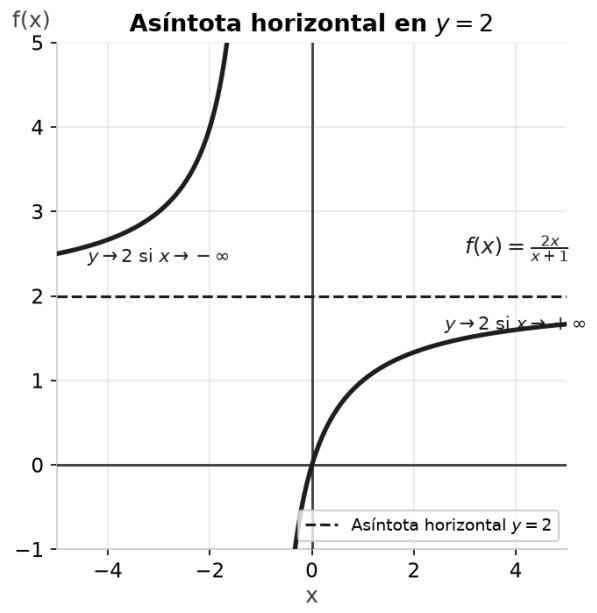
Asíntota horizontal

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de f si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ es el número real L. Puede haber una distinta en cada extremo.

$$y = L \text{ asíntota horizontal} \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ o } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

EJEMPLO:

Para $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, al calcular su límite cuando $x \to \infty$, se produce una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Como los grados son iguales, dividimos sus coeficientes principales: $\frac{2}{1} = 2$. Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal.



Asíntota horizontal en $y = 2$

DEFINICIÓN

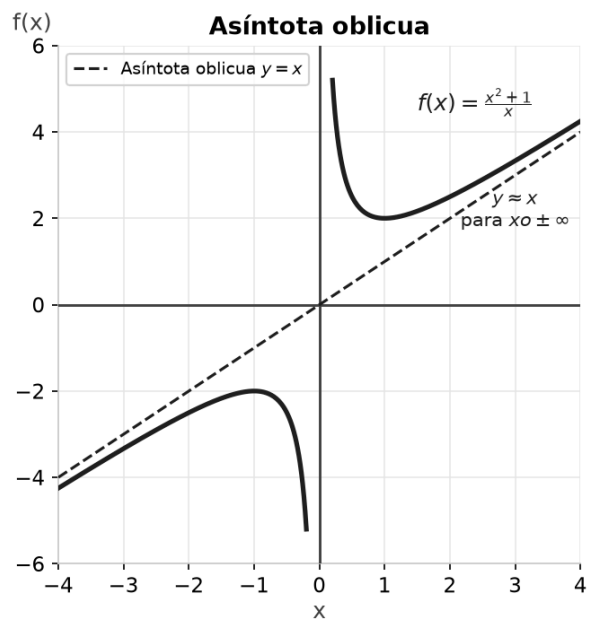
Asíntota oblicua

La recta $y = mx + n$ con $m \neq 0$ es una **asíntota oblicua** de f si la distancia vertical entre la gráfica y la recta tiende a 0 en el infinito. No existe si ya hay asíntota horizontal en ese extremo. En una función racional existe cuando el grado del numerador es exactamente una unidad mayor que el del denominador. Sus parámetros se obtienen con los límites siguientes.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big)$$

EJEMPLO:

Para $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$:
Calculamos $m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$.
Calculamos $n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Por tanto, la asíntota oblicua es $y = 1x + 0 \Rightarrow y = x$.



Asíntota oblicua $y = x$

Continuidad y discontinuidad

DEFINICIÓN

Función continua

Una función es **continua en un punto** $x = a$ si se cumplen tres condiciones simultáneamente:
① $f(a)$ está definida.
② Existe $\lim_{x \to a} f(x)$.
③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Una función es continua si lo es en todos los puntos de su dominio.

$$f \text{ continua en } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = x^2$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Los polinomios, las funciones trigonométricas y la exponencial son siempre continuas en su dominio.

DEFINICIÓN

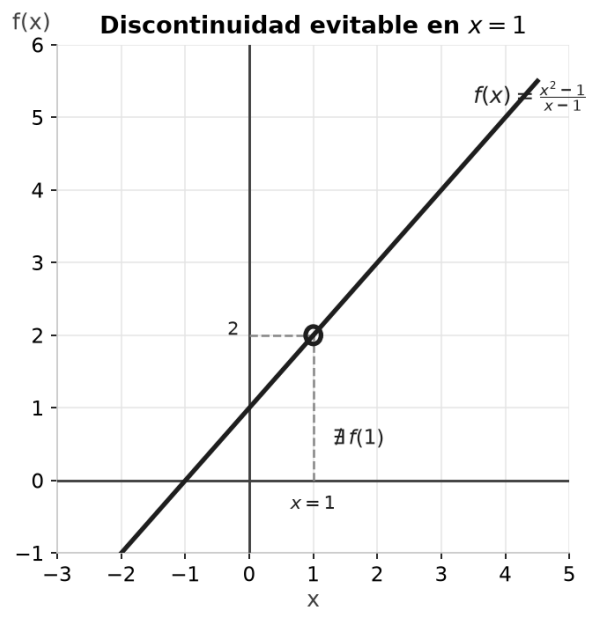
Discontinuidad evitable

Se produce cuando existe el límite en el punto pero **la función no está definida** allí (o toma un valor distinto al límite). Se llama evitable porque se puede redefinir la función en ese punto para hacerla continua.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{pero} \quad f(a) \text{ no existe o } f(a) \neq L$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ es discontinua en $x = 1$, pero $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Redefiniendo $f(1) = 2$ la función se vuelve continua. Observa el círculo hueco en $x = 1$: indica que ese punto no está definido.



Discontinuidad evitable en $x = 1$

DEFINICIÓN

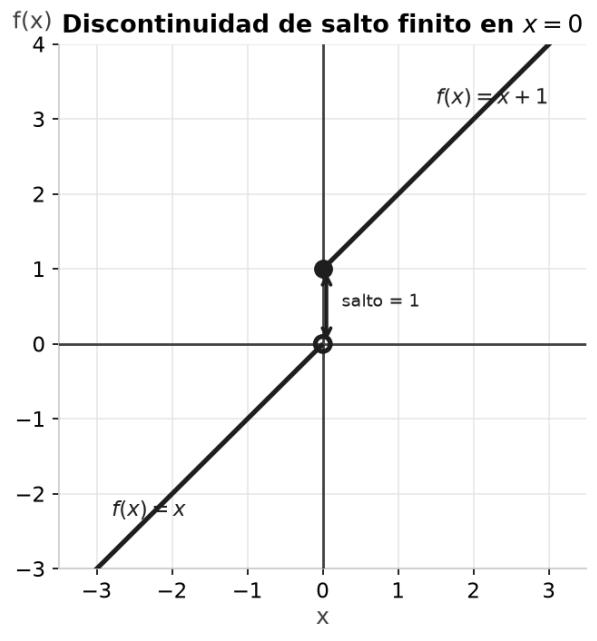
Discontinuidad de salto finito

Los límites laterales **existen ambos** y son **finitos**, pero son diferentes entre sí. El *salto* es la diferencia entre el límite por la derecha y por la izquierda: $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)$.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}, \quad L_1 \neq L_2$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$. El salto vale 1.



Discontinuidad de salto finito en $x = 0$

DEFINICIÓN

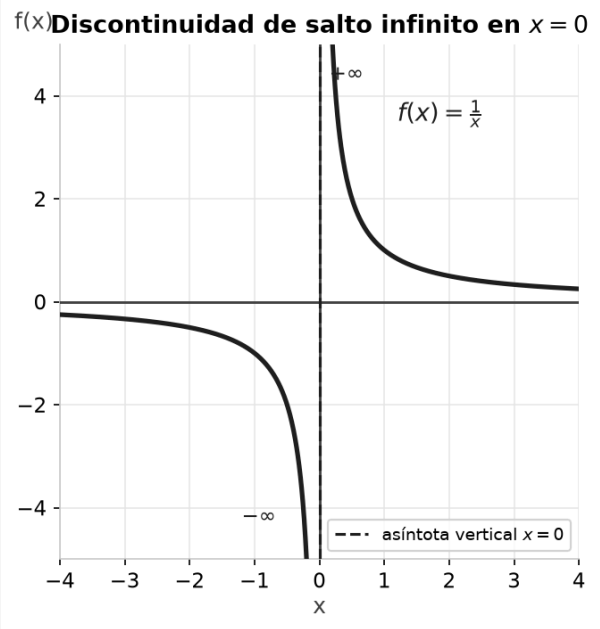
Discontinuidad de salto infinito

Alguno de los límites laterales (por la izquierda o por la derecha) es **infinito**. La función presenta una *asíntota vertical* en el punto de discontinuidad.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

EJEMPLO:

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$, ya que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.



Discontinuidad de salto infinito de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 0$

TEMA 4

DERIVADAS

Concepto de derivada, reglas de derivación, tabla de derivadas y aplicaciones: recta tangente, monotonía, extremos relativos, curvatura, puntos de inflexión y problemas de optimización.

Concepto de derivada

DEFINICIÓN

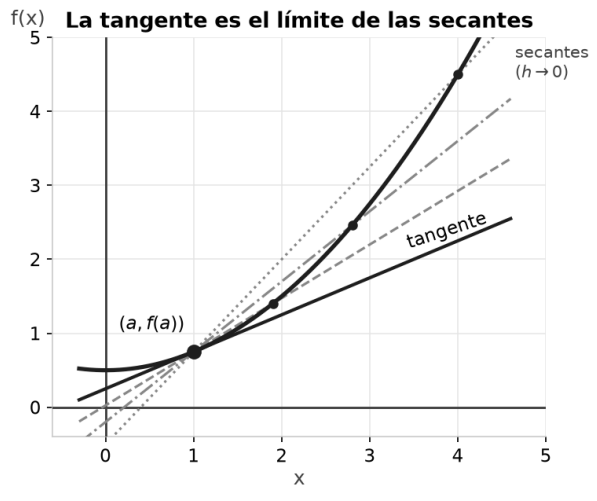
Derivada en un punto

Sea f una función definida en un entorno de a. La **derivada** de f en a es, cuando existe y es finito, el límite del cociente incremental (la pendiente de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ cuando $h \to 0$). Se escribe $f'(a)$. Si existe, se dice que f es **derivable** en a; su valor es la **tasa de variación instantánea** de f en a y la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO:

Para $f(x) = x^2$ en $x = 3$: $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$.



DEFINICIÓN

Función derivada

La **función derivada** de f es la función f' que asigna a cada x donde f es derivable el valor $f'(x)$. También se denota y' o $\frac{dy}{dx}$. Toda función derivable en un punto es continua en él, pero no al revés ($|x|$ es continua en 0 y no es derivable).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJEMPLO:

La función derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Así, $f'(3) = 6$, $f'(0) = 0$ y $f'(-1) = -2$.

Reglas de derivación

TEOREMA

Derivada de una suma o diferencia

La derivada de una suma (o diferencia) de funciones derivables es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

EJEMPLO:

Si $f(x) = x^3 + \sin x$, entonces $f'(x) = 3x^2 + \cos x$.

TEOREMA

Derivada del producto por una constante

Una constante multiplicativa sale fuera de la derivada.

$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$

EJEMPLO:

Si $f(x) = 5x^4$, entonces $f'(x) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$.

TEOREMA

Derivada de un producto

La derivada de un producto es la derivada del primero por el segundo, más el primero por la derivada del segundo. **No** es el producto de las derivadas.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

EJEMPLO:

Si $f(x) = x^2 \cdot \ln x$: $f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \ln x + x$.

TEOREMA

Derivada de un cociente

Para $g(x) \neq 0$: derivada del numerador por el denominador, menos numerador por derivada del denominador, todo partido por el denominador al cuadrado.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

EJEMPLO:

Si $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$: $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

TEOREMA

Regla de la cadena

Para derivar una **función compuesta** $f(g(x))$: se deriva la función «de fuera» f evaluada en la de dentro $g(x)$, y se multiplica por la derivada de la función «de dentro».

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

EJEMPLO:

Si $f(x) = \sin(x^2)$, la función de fuera es $\sin(u)$ y la de dentro $u = x^2$: $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$.

Tabla de derivadas

PROPIEDAD

Derivadas de funciones elementales

Tabla con las derivadas más habituales, expresadas para una función $u = u(x)$ (el factor u' viene de la regla de la cadena).

EJEMPLO:

Función	Derivada
k (constante)	0
x	1
u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
e^u	$e^u \cdot u'$
a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\log_a u$	$\dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\tan u$	$(1 + \tan^2 u) \cdot u'$

Recta tangente

DEFINICIÓN

Recta tangente

La **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por él con pendiente $f'(a)$: es la posición límite de las rectas secantes cuando el segundo punto se acerca a $(a, f(a))$. Se necesitan dos datos: el punto (sustituyendo en f) y la pendiente (sustituyendo en f').

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

EJEMPLO:

Tangente a $f(x) = x^2 - 3x$ en $x = 1$:
$f(1) = -2$, $f'(x) = 2x - 3$, $f'(1) = -1$
$y - (-2) = -1 \cdot (x - 1) \implies y = -x - 1$

Monotonía y extremos relativos

TEOREMA

Criterio de la primera derivada: monotonía

Si f es derivable en un intervalo: si $f'(x) > 0$ en todo el intervalo, f es **estrictamente creciente**; si $f'(x) < 0$, **estrictamente decreciente**. **Procedimiento:** 1) calcular $f'(x)$; 2) resolver $f'(x) = 0$ y localizar los puntos donde f o f' no existen; 3) dividir la recta en intervalos con esos puntos; 4) estudiar el signo de f' en cada intervalo probando un valor.

$$f'(x) > 0 \implies f \text{ creciente} \qquad f'(x) < 0 \implies f \text{ decreciente}$$

EJEMPLO:

$f(x) = x^3 - 3x$: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$
- En $(-\infty, -1)$: $f'(-2) = 9 > 0$, creciente.
- En $(-1, 1)$: $f'(0) = -3 < 0$, decreciente.
- En $(1, +\infty)$: $f'(2) = 9 > 0$, creciente.

TEOREMA

Extremos relativos: condición necesaria y criterio

Si f es derivable en a y tiene en a un extremo relativo, entonces $f'(a) = 0$ (**condición necesaria**). El recíproco es falso: en $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ pero no hay extremo. Para decidir, se estudia el signo de f' alrededor de a: si pasa de $+$ a $-$ hay un máximo relativo y si pasa de $-$ a $+$ hay un mínimo relativo.

$$f'(a) = 0 \text{ y } f' \text{ pasa de } + \text{ a } - \implies \text{máximo} \qquad f' \text{ pasa de } - \text{ a } + \implies \text{mínimo}$$

EJEMPLO:

En $f(x) = x^3 - 3x$:
- Máximo relativo en $x = -1$: $f(-1) = 2$, punto $(-1, 2)$.
- Mínimo relativo en $x = 1$: $f(1) = -2$, punto $(1, -2)$.

TEOREMA

Criterio de la segunda derivada

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a)$ existe: si $f''(a) < 0$ hay un máximo relativo, y si $f''(a) > 0$ hay un mínimo relativo. Si $f''(a) = 0$, el criterio no decide y hay que estudiar el signo de f'.

$$f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) < 0 \implies \text{máximo} \qquad f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) > 0 \implies \text{mínimo}$$

EJEMPLO:

$f(x) = x^3 - 3x$, $f''(x) = 6x$:
$f''(-1) = -6 < 0 \implies$ máximo en $x = -1$
$f''(1) = 6 > 0 \implies$ mínimo en $x = 1$

Curvatura y puntos de inflexión

TEOREMA

Criterio de la segunda derivada: curvatura

Si f es dos veces derivable en un intervalo: si $f''(x) > 0$, f es **convexa** $(\cup)$ y si $f''(x) < 0$ es **cóncava** $(\cap)$. Se estudia el signo de f'' igual que el de f' en la monotonía. Aquí se sigue el convenio de los libros de texto españoles (algunos autores llaman a $\cup$ «cóncava hacia arriba»).

$$f''(x) > 0 \implies f \text{ convexa } (\cup) \qquad f''(x) < 0 \implies f \text{ cóncava } (\cap)$$

EJEMPLO:

$f(x) = x^3 - 3x$, $f''(x) = 6x$:
- En $(-\infty, 0)$: $f'' < 0$, cóncava $(\cap)$.
- En $(0, +\infty)$: $f'' > 0$, convexa $(\cup)$.

DEFINICIÓN

Puntos de inflexión

Un **punto de inflexión** es un punto de la gráfica donde la función cambia de curvatura (de cóncava a convexa o al revés). Si f es dos veces derivable, en él $f''(a) = 0$ y f'' cambia de signo (que sea 0 no basta: x^4 tiene $f''(0) = 0$ y no hay inflexión).

$$f''(a) = 0 \text{ y } f'' \text{ cambia de signo en } a$$

EJEMPLO:

En $f(x) = x^3 - 3x$, f'' cambia de signo en $x = 0$: punto de inflexión en $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Optimización

PROCEDIMIENTO

Cómo resolver un problema de optimización

1) Identifica qué hay que hacer máximo o mínimo y escribe su fórmula. 2) Si tiene dos variables, usa el dato del enunciado (la **ligadura**) para dejar una sola. 3) Deriva e iguala a cero. 4) Comprueba con f'' o con el signo de f' si es máximo o mínimo. 5) Responde a la pregunta con todas las medidas que se piden y sus unidades.

función a optimizar $\to$ una sola variable $\to f'(x) = 0 \to$ comprobar máximo o mínimo

PROCEDIMIENTO

Ejemplo: rectángulo de área máxima

El perímetro es la ligadura que permite expresar y en función de x.

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

EJEMPLO:

Con 40 m de cuerda se quiere rodear un rectángulo de área máxima.
Lados x e y: $2x + 2y = 40 \implies y = 20 - x$
$A'(x) = 20 - 2x = 0 \implies x = 10$
$A''(x) = -2 < 0 \implies$ máximo
El rectángulo es un cuadrado de 10 m de lado, con área $100\,\mathrm{m}^2$.

RESUMEN

1. Funciones

Función, dominio y recorrido

A cada x del dominio le corresponde un **único** y. Dominio: donde f está definida (cuidado con denominadores nulos, raíces pares de negativos y logaritmos de no positivos).

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x : f(x) \text{ existe}\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Cortes con los ejes

Eje Y: $x = 0$, punto $(0, f(0))$. Eje X: resolver $f(x) = 0$ (los ceros), que separan los intervalos de signo.

Monotonía, curvatura y extremos

Creciente si al aumentar x aumenta $f(x)$. Convexa ($\cup$) o cóncava ($\cap$); el punto de inflexión es donde cambia. Máximo y mínimo relativos: el mayor o menor valor cerca del punto; absolutos, en todo el dominio.

Simetría

$$\text{par: } f(-x) = f(x) \text{ (eje } Y) \qquad \text{impar: } f(-x) = -f(x) \text{ (origen)}$$

Periodicidad

T es el periodo.

$$f(x + T) = f(x)$$

Composición e inversa

Inversa: se cambia $f(x)$ por y, se intercambian x e y y se despeja y.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

2. Funciones elementales

Afín y lineal

Recta de pendiente m y ordenada en el origen n (lineal si $n = 0$).

$$f(x) = mx + n \qquad m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Cuadrática

Parábola: hacia arriba si $a > 0$, hacia abajo si $a < 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad x_v = -\frac{b}{2a} \qquad a(x-h)^2 + k: \text{ vértice } (h,k)$$

Racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{Dom}(f) = \{x : Q(x) \neq 0\}$$

Radical

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \qquad n \text{ par} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \{x : g(x) \geq 0\}$$

Exponencial

Pasa por $(0,1)$, siempre positiva; creciente si $a > 1$, decreciente si $0 < a < 1$.

$$f(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

Logarítmica

Inversa de la exponencial. Dominio $(0, +\infty)$, pasa por $(1,0)$; creciente si $a > 1$, decreciente si $0 < a < 1$.

$$f(x) = \log_a x \qquad y = \log_a x \iff a^y = x$$

3. Límites y continuidad

Límite y límites laterales

El límite existe si los dos laterales existen y coinciden.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Indeterminaciones

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad 0^0$$

Cómo resolverlas

- $\frac{\infty}{\infty}$: comparar grados (o dividir por la mayor potencia).
- $\frac{0}{0}$: factorizar y simplificar, o multiplicar por el conjugado si hay raíces.
- $\infty - \infty$: operar las fracciones o multiplicar por el conjugado.
- 1^{∞}: con el número e.

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\,(f(x)-1)} \qquad \text{si } f \to 1,\ g \to \infty$$

Asíntotas

Vertical $x = a$: límite infinito en a (candidatos: ceros del denominador). Horizontal $y = L$: límite finito en $\pm\infty$. Oblicua $y = mx + n$ si no hay horizontal:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big)$$

Continuidad

Discontinuidades: **evitable** (el límite existe pero no vale $f(a)$), **salto finito** (laterales finitos distintos), **salto infinito** (algún lateral infinito).

$$f \text{ continua en } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

4. Derivadas

Definición

Es la pendiente de la recta tangente en $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Reglas

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (kf)' = kf' \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

Tabla básica

Con $u = u(x)$:

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (e^u)' = u'e^u \quad (a^u)' = u'a^u \ln a \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sin u)' = u'\cos u \quad (\cos u)' = -u'\sin u \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Recta tangente

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

Monotonía y extremos

Los extremos se buscan donde $f'(x) = 0$.

$$f' > 0 \Rightarrow \text{creciente} \quad f' < 0 \Rightarrow \text{decreciente} \qquad f'(a) = 0:\ f''(a) < 0 \Rightarrow \text{máx.},\ f''(a) > 0 \Rightarrow \text{mín.}$$

Curvatura e inflexión

Punto de inflexión: $f''(a) = 0$ y f'' cambia de signo.

$$f'' > 0 \Rightarrow \text{convexa } (\cup) \qquad f'' < 0 \Rightarrow \text{cóncava } (\cap)$$

Optimización

Función a optimizar → dejarla en una sola variable con la condición del enunciado → $f'(x) = 0$ → comprobar si es máximo o mínimo.

ÍNDICE DE CONCEPTOS

A

Asíntota horizontal DEFINICIÓN 38
Asíntota oblicua DEFINICIÓN 39
Asíntota vertical DEFINICIÓN 37

C

Ceros de una función DEFINICIÓN 12
Composición de funciones DEFINICIÓN 17
Criterio de la primera derivada: monotonía TEOREMA 50
Criterio de la segunda derivada TEOREMA 51
Criterio de la segunda derivada: curvatura TEOREMA 52

D

Derivada de un cociente TEOREMA 47
Derivada de un producto TEOREMA 47
Derivada de una suma o diferencia TEOREMA 46
Derivada del producto por una constante TEOREMA 47
Derivada en un punto DEFINICIÓN 45
Discontinuidad de salto finito DEFINICIÓN 42
Discontinuidad de salto infinito DEFINICIÓN 43
Discontinuidad evitable DEFINICIÓN 41
Dominio DEFINICIÓN 4

E

Extremos relativos: condición necesaria y criterio TEOREMA 51

F

Función DEFINICIÓN 3
Función afín y función lineal DEFINICIÓN 20
Función cóncava DEFINICIÓN 6
Función continua DEFINICIÓN 40
Función convexa DEFINICIÓN 7
Función cuadrática DEFINICIÓN 21
Función derivada DEFINICIÓN 46
Función exponencial DEFINICIÓN 26
Función impar DEFINICIÓN 15
Función inversa DEFINICIÓN 17
Función logarítmica DEFINICIÓN 27
Función par DEFINICIÓN 14
Función periódica DEFINICIÓN 16
Función racional DEFINICIÓN 23
Función radical DEFINICIÓN 24

I

Indeterminación DEFINICIÓN 34

L

Límite de una función en un punto DEFINICIÓN 30
Límites infinitos y límites en el infinito DEFINICIÓN 33
Límites laterales DEFINICIÓN 33

M

Máximo absoluto DEFINICIÓN 9
Máximo relativo DEFINICIÓN 8
Mínimo absoluto DEFINICIÓN 10
Mínimo relativo DEFINICIÓN 9
Monotonía DEFINICIÓN 5

P

Punto de inflexión DEFINICIÓN 8
Puntos de inflexión DEFINICIÓN 52

R

Recorrido (imagen) DEFINICIÓN 4
Recta tangente DEFINICIÓN 50
Regla de la cadena TEOREMA 48

S

Signo de la función DEFINICIÓN 13