ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

GRAFOS

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Grafos **3**

¿Qué es un grafo? 3
Vértices y aristas de un grafo 4
Grafos dirigidos y no dirigidos 5
Matriz de adyacencia 7
Transbordos o pasos intermedios 9
Matriz de accesibilidad 12

Resumen **13**

Índice de conceptos **14**

TEMA 1

GRAFOS

Qué es un grafo, vértices y aristas, grafos dirigidos y no dirigidos. Matriz de adyacencia, conexiones con transbordos o pasos intermedios mediante las potencias A^2, A^3… y matriz de accesibilidad.

¿Qué es un grafo?

DEFINICIÓN

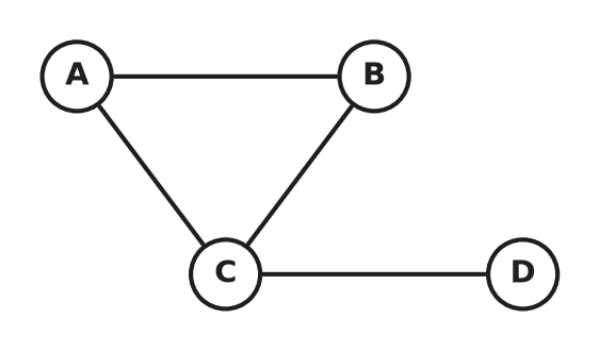
Grafo

Un **grafo** es un dibujo formado por un conjunto de **puntos** (vértices) y un conjunto de **líneas** (aristas) que unen algunos de esos puntos entre sí. Sirve para representar **relaciones o conexiones** entre elementos: ciudades unidas por carreteras, personas que se siguen en una red social, ordenadores conectados en una red...
Lo importante de un grafo no es la forma ni la posición del dibujo, sino **qué vértices están conectados con cuáles**.

$$G = (V, E) \qquad V = \text{vértices}, \quad E = \text{aristas}$$

EJEMPLO:

Cuatro pueblos A, B, C y D unidos por carreteras: A-B, A-C, B-C y C-D.



$$V = \{A, B, C, D\}, \quad E = \{AB,\ AC,\ BC,\ CD\}$$

Vértices y aristas de un grafo

DEFINICIÓN

Vértices

Los **vértices** (o nodos) son los puntos del grafo. Representan los elementos que queremos relacionar y se nombran con letras mayúsculas o números. El número de vértices se llama **orden** del grafo.

EJEMPLO:

> En el grafo de los pueblos los vértices son A, B, C y D: es un grafo de orden 4.

DEFINICIÓN

Aristas

Las **aristas** son las líneas que unen dos vértices. Indican que entre esos dos elementos hay una relación. Una arista se nombra con sus dos extremos: la arista que une A y B es AB.

Dos vértices unidos por una arista se llaman **adyacentes**. Una arista que une un vértice consigo mismo se llama **lazo**.

EJEMPLO:

> En el grafo de los pueblos hay 4 aristas: AB, AC, BC y CD.
> • A y B son adyacentes (hay carretera directa).
> • A y D **no** son adyacentes: para ir de A a D hay que pasar por C.

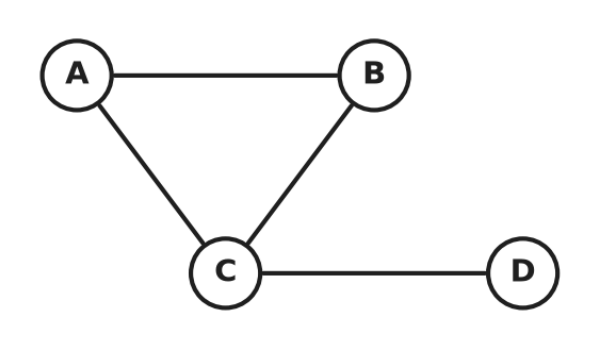
Grafos dirigidos y no dirigidos

DEFINICIÓN

Grafo no dirigido

En un grafo **no dirigido** las aristas no tienen sentido: si A está conectado con B, también B está conectado con A. Las aristas se dibujan como líneas sin flecha.
Ejemplos: carreteras de doble sentido, amistades en una red social (si tú eres amigo de alguien, esa persona también es amiga tuya).

EJEMPLO:



La arista AB permite ir de A a B y de B a A.

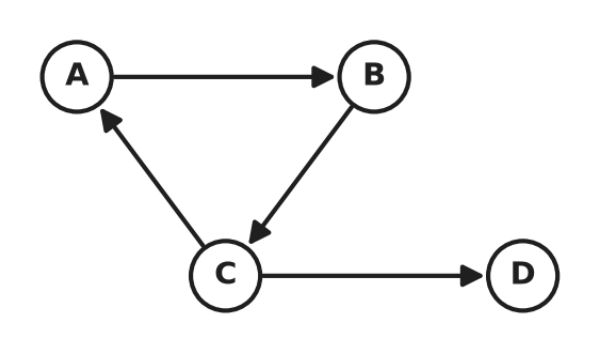
DEFINICIÓN

Grafo dirigido

En un grafo **dirigido** (o digrafo) cada arista tiene un **sentido**, indicado con una flecha. Estas aristas también se llaman **arcos**. Que haya un arco de A a B ($A \to B$) **no** significa que haya uno de B a A.
Ejemplos: calles de sentido único, vuelos entre ciudades, seguidores en una red social (tú puedes seguir a alguien que no te sigue).

EJEMPLO:

Vuelos directos entre cuatro ciudades: $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$ y $C \to D$.



Se puede volar de C a D, pero **no** de D a C.

Matriz de adyacencia

DEFINICIÓN

Matriz de adyacencia

La **matriz de adyacencia** de un grafo con n vértices es una matriz cuadrada $n \times n$ en la que cada fila y cada columna corresponden a un vértice (en el mismo orden). El elemento a_{ij} indica cuántas aristas van **del vértice i al vértice j**; si solo hay una o ninguna, vale 1 o 0.
Así el grafo queda guardado en una matriz y podemos usar todas las operaciones con matrices para estudiarlo.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay arista de } i \text{ a } j \\ 0 & \text{si no la hay} \end{cases}$$

EJEMPLO:

Si en un grafo de vértices A, B, C hay arista de A a C, el elemento fila A, columna C vale 1: $a_{13} = 1$.

PROPIEDAD

Matriz de un grafo no dirigido: $A^t = A$

En un grafo no dirigido, si hay arista de i a j también la hay de j a i, así que $a_{ij} = a_{ji}$. Por eso su matriz de adyacencia es **simétrica**: **su traspuesta es ella misma**.
Si no hay lazos, la diagonal principal es toda de ceros.

$$\text{Grafo no dirigido} \iff A^t = A$$

EJEMPLO:

Grafo de los pueblos (filas y columnas en el orden A, B, C, D):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

DEFINICIÓN

Matriz de un grafo dirigido

En un grafo dirigido, $a_{ij} = 1$ si hay un arco que **sale de** i **y llega a** j. La fila indica el origen y la columna el destino. En general la matriz **no es simétrica** ($A^t \neq A$), porque un arco $i \to j$ no implica que exista $j \to i$.

- La suma de la **fila** i es el número de arcos que **salen** de i.
- La suma de la **columna** j es el número de arcos que **llegan** a j.

$$a_{ij} = 1 \iff i \to j \qquad (\text{fila} = \text{origen},\ \text{columna} = \text{destino})$$

EJEMPLO:

Vuelos $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, $C \to D$ (orden A, B, C, D):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $m_{34} = 1$: hay vuelo de C a D; $m_{43} = 0$: no hay vuelo de D a C. Por tanto $M^t \neq M$.
- Fila D toda de ceros: de D no sale ningún vuelo.
- Columna A: $0 + 0 + 1 + 0 = 1$ vuelo llega a A.

PROCEDIMIENTO

Del grafo a la matriz y de la matriz al grafo

Para pasar de la matriz al grafo, se dibujan los vértices y, por cada 1 en la posición (i, j), una arista (o flecha) de i a j. Primero se comprueba si la matriz es simétrica: si lo es, el grafo puede dibujarse **no dirigido**.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No es simétrica → grafo dirigido con vértices $1, 2, 3$.

- Fila 1: unos en las columnas 2 y 3 → arcos $1 \to 2$ y $1 \to 3$.
- Fila 2: uno en la columna 3 → arco $2 \to 3$.
- Fila 3: todo ceros → del vértice 3 no sale nada.

Transbordos o pasos intermedios

DEFINICIÓN

Camino y longitud de un camino

Un **camino** de i a j es una sucesión de aristas (o arcos, si el grafo es dirigido) que se recorren una detrás de otra, empezando en i y acabando en j. Su **longitud** es el número de aristas que lo forman. Ir de i a j en **dos pasos** significa hacer **un transbordo** (una parada intermedia) en algún vértice k: $i \to k \to j$.

$$\text{longitud} = \text{número de aristas del camino} \qquad k \text{ pasos} = k - 1 \text{ transbordos}$$

EJEMPLO:

En el grafo de los pueblos, $A - C - D$ es un camino de longitud 2 (un transbordo en C) y $A - B - C - D$ es un camino de longitud 3 (dos transbordos).

TEOREMA

Caminos de longitud 2: la matriz A^2

Un **camino** es una sucesión de aristas que se recorren una detrás de otra; su **longitud** es el número de aristas. Ir de i a j en **dos pasos** significa hacer **un transbordo** (una parada intermedia) en algún vértice k: $i \to k \to j$.
Al multiplicar $A \cdot A$, el elemento (i,j) es $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots$, y cada sumando vale 1 solo si existen $i \to k$ y $k \to j$. Por eso **cada elemento de A^2 cuenta los caminos de longitud 2** entre esos vértices.

$$(A^2)_{ij} = \text{número de caminos de } i \text{ a } j \text{ con 1 transbordo}$$

EJEMPLO:

Con la matriz M de los vuelos:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $(M^2)_{13} = 1$: de A a C con un transbordo: $A \to B \to C$.
- $(M^2)_{24} = 1$: de B a D con un transbordo: $B \to C \to D$.
- $(M^2)_{14} = 0$: no se puede ir de A a D con exactamente un transbordo.

TEOREMA

Caminos de longitud k: la matriz A^k

La idea se generaliza: **cada elemento de A^k es el número de caminos de longitud k** entre dos vértices, es decir, con $k-1$ transbordos.
¡Cuidado con el error típico! A^2 es **un** transbordo, A^3 son **dos** transbordos: el exponente es el número de trayectos, no de paradas.

$$(A^k)_{ij} = \text{número de caminos de } i \text{ a } j \text{ de longitud } k \ \ (k-1 \text{ transbordos})$$

EJEMPLO:

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $(M^3)_{14} = 1$: de A a D con dos transbordos: $A \to B \to C \to D$.
- $(M^3)_{11} = 1$: se puede salir de A y volver a A en tres vuelos: $A \to B \to C \to A$.

OBSERVACIÓN

A^2 en un grafo no dirigido

En un grafo no dirigido, los elementos de A^2 también cuentan caminos de longitud 2, y pueden ser mayores que 1 si hay varias rutas distintas. En la **diagonal** aparecen los caminos de **ida y vuelta**: salir de un vértice por una arista y regresar por la misma.

EJEMPLO:

Grafo de los pueblos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $(A^2)_{14} = 1$: de A a D pasando por un pueblo: $A - C - D$.
- $(A^2)_{33} = 3$: tres caminos de ida y vuelta desde C: $C - A - C$, $C - B - C$, $C - D - C$.
- A^2 también es simétrica, como A.

Matriz de accesibilidad

DEFINICIÓN

Accesibilidad y matriz de accesibilidad

Un vértice j es **accesible** desde i si se puede llegar de i a j por algún camino, con los transbordos que hagan falta. En un grafo de n vértices basta con mirar caminos de longitud 1 hasta $n-1$ (un camino más largo repetiría vértices).
La **matriz de accesibilidad** es la suma de las potencias de la matriz de adyacencia hasta A^{n-1}. Cada elemento cuenta **todos** los caminos de longitud 1 a $n-1$ de i a j: si es **distinto de cero**, j es accesible desde i; si es **cero**, no se puede llegar.

$$\text{Acc} = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$$

EJEMPLO:

Con 4 vértices: $\text{Acc} = A + A^2 + A^3$.
Con 5 vértices: $\text{Acc} = A + A^2 + A^3 + A^4$.

PROCEDIMIENTO

Ejemplo completo

Se calculan las potencias, se suman y se interpreta el resultado por filas (desde dónde se sale) y por columnas (adónde se llega). A veces se escribe la matriz de accesibilidad solo con unos y ceros, sustituyendo cada elemento distinto de cero por un 1.

EJEMPLO:

Vuelos $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, $C \to D$ $(n = 4)$:

$$\text{Acc} = M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Filas A, B y C sin ceros: desde estas ciudades se puede llegar a cualquier otra.
- Fila D toda de ceros: desde D no se puede llegar a ninguna ciudad.
- Columna D con todo unos salvo en D: a D se llega desde cualquier otra ciudad.

RESUMEN

1. Grafos

Grafo

Vértices unidos por aristas. En un grafo **dirigido** las aristas tienen sentido (flechas).

$$G = (V, E)$$

Matriz de adyacencia

Fila = origen, columna = destino. Un grafo no dirigido tiene matriz simétrica.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay arista de } i \text{ a } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad \text{no dirigido} \iff A^t = A$$

Caminos y transbordos

Longitud de un camino: número de aristas. k pasos son $k-1$ transbordos.

$$(A^k)_{ij} = \text{número de caminos de } i \text{ a } j \text{ de longitud } k$$

Matriz de accesibilidad

Un 0 en la posición (i, j) indica que no se puede llegar de i a j (n = número de vértices).

$$\text{Acc} = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

A

Accesibilidad y matriz de accesibilidad DEFINICIÓN 12
Aristas DEFINICIÓN 4

C

Camino y longitud de un camino DEFINICIÓN 9
Caminos de longitud 2: la matriz A^2 TEOREMA 10
Caminos de longitud k: la matriz A^k TEOREMA 11

G

Grafo DEFINICIÓN 3
Grafo dirigido DEFINICIÓN 6
Grafo no dirigido DEFINICIÓN 5

M

Matriz de adyacencia DEFINICIÓN 7
Matriz de un grafo dirigido DEFINICIÓN 8

V

Vértices DEFINICIÓN 4