

ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

INECUACIONES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Inecuaciones y programación lineal 3

Desigualdades e intervalos 3
Inecuaciones de primer grado con una incógnita 6
Inecuaciones de segundo grado 8
Inecuaciones polinómicas y racionales 10
Inecuaciones con valor absoluto 12
Sistemas de inecuaciones con una incógnita 12
Inecuaciones lineales con dos incógnitas 14
Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas 17
¿Qué es la programación lineal? 20
Método analítico (vértices) 22
Método gráfico 23
Casos especiales 26

Resumen 28

Índice de conceptos 29

TEMA 1

INECUACIONES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Inecuaciones de una y dos incógnitas (lineales, de segundo grado, racionales y con valor absoluto), sus sistemas y programación lineal: región factible y vértices.

Desigualdades e intervalos

DEFINICIÓN

Desigualdad

Una **desigualdad** compara dos expresiones con uno de los signos $<$ (menor que), $>$ (mayor que), $\leq$ (menor o igual) o $\geq$ (mayor o igual). Para números reales, $a < b$ significa que $b - a$ es positivo; es decir, a queda a la izquierda de b en la recta numérica. Entre dos números reales cualesquiera se cumple siempre una y solo una de estas relaciones: $a < b$, $a = b$ o $a > b$.

$$a < b \iff b - a > 0 \qquad a \leq b \iff a < b \text{ o } a = b$$

EJEMPLO:

$-3 < 2$ porque $2 - (-3) = 5 > 0$.
$5 \geq 5$ es cierta (se cumple la igualdad). $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$.

DEFINICIÓN

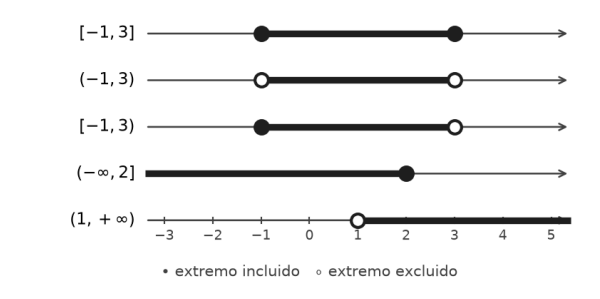
Intervalo

Un **intervalo** es el conjunto de los números reales comprendidos entre dos valores, los **extremos**. Si el extremo pertenece al intervalo se escribe con corchete $[]$ (y en la recta se marca con un punto relleno •); si no pertenece, con paréntesis $()$ (punto hueco ○). Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números, por lo que su extremo es siempre un paréntesis.

$[a,b]=\{x:a\leq x\leq b\}\quad (a,b)=\{x:a<x<b\}\quad [a,b)=\{x:a\leq x<b\}\quad (a,+\infty)=\{x:x>a\}\quad (-\infty,a]=\{x:x\leq a\}$

EJEMPLO:

$[-1,3]$: de -1 a 3, ambos incluidos. $(-1,3)$: sin los extremos. $(-\infty,2]$: todos los números menores o iguales que 2. $x\geq 5$ se escribe $[5,+\infty)$.



PROPIEDAD

Propiedades de las desigualdades

Estas reglas permiten transformar una desigualdad en otra equivalente (con las mismas soluciones):

1. **Sumar o restar** el mismo número a los dos miembros mantiene el sentido.
2. **Multiplicar o dividir** los dos miembros por un número **positivo** mantiene el sentido.
3. **Multiplicar o dividir** los dos miembros por un número **negativoinvierte** el sentido de la desigualdad. Es el error más frecuente al resolver inecuaciones. Por ejemplo, $2 < 5$ es cierta; si multiplicamos por -3 queda $-6 > -15$, y no $-6 < -15$.

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \qquad a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc \qquad a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

EJEMPLO:

De $3 < 7$: sumando 4 queda $7 < 11$; multiplicando por 2 queda $6 < 14$; multiplicando por -2 queda $-6 > -14$ (sentido invertido).

DEFINICIÓN

Unión e intersección de intervalos

La **intersección** $A \cap B$ de dos conjuntos son los números que pertenecen a A **y** a B; la **unión** $A \cup B$, los que pertenecen a A **o** a B (o a ambos). Con intervalos se obtienen dibujándolos en la misma recta numérica.

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ y } x \in B \qquad x \in A \cup B \iff x \in A \text{ o } x \in B$$

EJEMPLO:

$(-2, 5] \cap [1, 8) = [1, 5]$ (lo que tienen en común).
$(-2, 5] \cup [1, 8) = (-2, 8)$.
$(-\infty, 1) \cap (3, +\infty) = \emptyset$ (no tienen ningún punto en común) y su unión se deja indicada: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita

DEFINICIÓN

Inecuación y solución

Una **inecuación** es una desigualdad en la que aparece una incógnita, como $2x - 3 < 5$. Una **solución** es un valor de la incógnita para el que la desigualdad es cierta. Resolver la inecuación es hallar el **conjunto de todas sus soluciones**, que normalmente es un intervalo (o unión de intervalos). Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Una inecuación de **primer grado** se puede reducir a la forma $ax + b < 0$ (o con $>$, $\leq$, $\geq$) con $a \neq 0$.

$ax + b < 0 \ (a \neq 0)$

EJEMPLO:

En $2x - 3 < 5$: $x = 1$ es solución porque $-1 < 5$ es cierto; $x = 4$ no lo es, porque $5 < 5$ es falso. Resolviéndola: $2x < 8 \Rightarrow x < 4$; el conjunto solución es $(-\infty, 4)$.

PROCEDIMIENTO

Resolución de una inecuación de primer grado

1. Si hay denominadores, **multiplica** los dos miembros por su m.c.m. (positivo, así que el sentido se mantiene).
2. Quita paréntesis.
3. Lleva los términos con x a un miembro y los números al otro (sumando o restando).
4. **Divide** entre el coeficiente de x. Si es **negativo**, invierte el sentido.
5. Escribe la solución como intervalo y represéntala en la recta.

EJEMPLO:

- $3x - 5 \leq 7 \Rightarrow 3x \leq 12 \Rightarrow x \leq 4$. Solución: $(-\infty, 4]$.
- $-2x + 3 > 9 \Rightarrow -2x > 6 \Rightarrow x < -3$ (se divide entre -2 y se invierte el sentido). Solución: $(-\infty, -3)$.
- $\dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{x+2}{3} - 1$. Multiplicamos por 6: $3(x-1) \geq 2(x+2) - 6 \Rightarrow 3x - 3 \geq 2x - 2 \Rightarrow x \geq 1$. Solución: $[1, +\infty)$.

Comprobación del último: $x = 3$ da $1 \geq 1{,}67 - 1 = 0{,}67$ ✓; $x = 0$ da $-0{,}5 \geq 0{,}67 - 1 = -0{,}33$, falso ✓.

OBSERVACIÓN

Sin solución o con todos los reales

Al simplificar puede desaparecer la incógnita y quedar una desigualdad entre números. Si es **cierta**, la inecuación se cumple para **todo** número real; si es **falsa**, **no tiene solución**.

EJEMPLO:

- $2x + 1 < 2x + 3 \Rightarrow 1 < 3$, cierto: solución $\mathbb{R}$.
- $3x - 2 \geq 3x + 1 \Rightarrow -2 \geq 1$, falso: sin solución, $\emptyset$.

Inecuaciones de segundo grado

DEFINICIÓN

Inecuación de segundo grado

Una **inecuación de segundo grado** es la que se puede escribir en la forma $ax^2 + bx + c > 0$ (o con $<$, $\geq$, $\leq$) con $a \neq 0$. Sus soluciones son los valores de x para los que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ está por encima del eje X (si pide > 0) o por debajo (si pide < 0); por eso se estudia el **signo** de la función cuadrática.

$$ax^2 + bx + c \square 0 \qquad (\square \in \{<, \leq, >, \geq\},\ a \neq 0)$$

EJEMPLO:

$x^2 - x - 6 \leq 0$ pregunta cuándo la parábola $y = x^2 - x - 6$ queda en el eje X o debajo de él.

TEOREMA

Signo de una función cuadrática

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta > 0$ hay dos raíces $x_1 < x_2$: f tiene el signo de a **fuera** de las raíces y el signo contrario **entre** ellas.

• Si $\Delta = 0$ hay una raíz doble x_0: f tiene el signo de a en todo $x \neq x_0$ y vale 0 en x_0.

• Si $\Delta < 0$ no hay raíces: f tiene el signo de a para todo x.

EJEMPLO:

$x^2 - x - 6$: $a = 1 > 0$ y raíces -2 y 3 (de $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$). Es positiva fuera de $[-2, 3]$ y negativa dentro.
$-x^2 + 4$: $a < 0$, raíces ± 2: es negativa fuera de $[-2, 2]$ y positiva dentro.

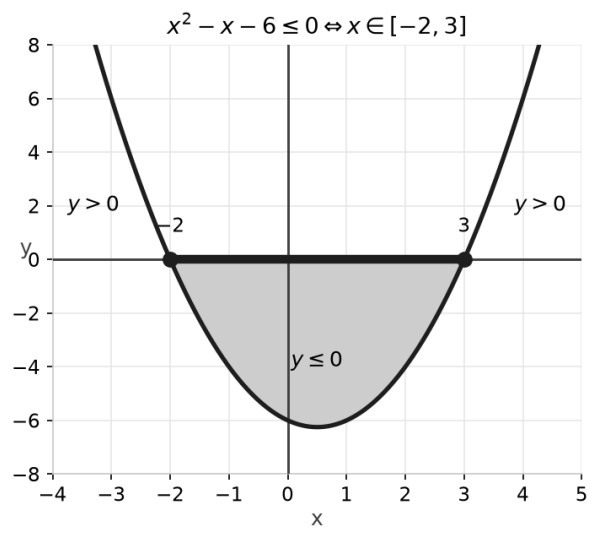
PROCEDIMIENTO

Resolución de una inecuación de segundo grado

1. Pasa todo a un miembro y deja 0 en el otro: $ax^2+bx+c \square 0$.
2. Resuelve $ax^2+bx+c=0$ para hallar las raíces.
3. Dibuja (o imagina) la parábola: hacia arriba si $a>0$, hacia abajo si $a<0$.
4. Elige los intervalos donde se cumple el signo pedido. Los extremos (las raíces) **se incluyen solo si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$**.

EJEMPLO:

• $x^2-x-6\leq 0$: raíces -2 y 3, parábola hacia arriba, queremos ≤ 0 (entre las raíces, con ellas): solución $[-2,3]$.



• $x^2-x-6>0$: fuera de las raíces: $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.
• $x^2-6x+9\leq 0$, o sea $(x-3)^2\leq 0$: $\Delta=0$, solo se anula en $x=3$: solución $\{3\}$. En cambio $x^2-6x+9>0$ vale para todo $x\neq 3$.
• $x^2-4x+5>0$: $\Delta=16-20<0$ y $a>0$, luego es siempre positiva: solución $\mathbb{R}$. Y $x^2-4x+5<0$ no tiene solución.

Inecuaciones polinómicas y racionales

DEFINICIÓN

Inecuación polinómica y racional

Una inecuación **polinómica** es de la forma $P(x) \square 0$ con P un polinomio de grado cualquiera. Una inecuación **racional** es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \square 0$ con P y Q polinomios. En una racional, los valores que anulan el denominador no están en el dominio, así que **nunca son solución**.

$$P(x) \square 0 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \square 0 \qquad (\square \in \{<, \leq, >, \geq\})$$

EJEMPLO:

$(x+1)(x-2)(x-4) < 0$ es polinómica de grado 3. $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ es racional, y $x = -2$ no puede ser solución.

PROCEDIMIENTO

Método de la tabla de signos

1. Pasa todo a un miembro, deja 0 en el otro y **opera** hasta tener un solo cociente (o producto).
2. **Factoriza** numerador y denominador.
3. Halla los **puntos críticos**: las raíces del numerador y del denominador. Dividen la recta en intervalos.
4. En cada intervalo estudia el **signo de cada factor** y multiplica (o divide) los signos.
5. Escoge los intervalos con el signo pedido. Las raíces del numerador se incluyen solo si es $\leq$ o $\geq$; las del denominador, **nunca**.

Error típico: multiplicar los dos miembros por el denominador sin saber si es positivo o negativo; hay que pasar todo a un lado.

EJEMPLO:

• $(x+1)(x-2)(x-4)<0$. Puntos críticos: -1, 2, 4.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
producto	$-$	$+$	$-$	$+$

Queremos <0: solución $(-\infty,-1)\cup(2,4)$.

• $\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$. Puntos críticos: 1 (numerador, incluido) y -2 (denominador, excluido).

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
cociente	$+$	$-$	$+$

Solución: $(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$.

• $\dfrac{x+1}{x-1}\leq 2$. Pasamos todo a un lado: $\dfrac{x+1}{x-1}-2=\dfrac{x+1-2x+2}{x-1}=\dfrac{3-x}{x-1}\leq 0$.

Puntos críticos: 1 (excluido) y 3 (incluido). El cociente es negativo en $(-\infty,1)$, positivo en $(1,3)$ y negativo en $(3,+\infty)$. Solución: $(-\infty,1)\cup[3,+\infty)$.

Inecuaciones con valor absoluto

DEFINICIÓN

Valor absoluto e inecuaciones

El **valor absoluto** $|x|$ es la distancia de x a 0 en la recta. Por tanto $|x-c|$ es la distancia de x a c. Para $a>0$:
• $|x|<a$ significa que x está a distancia menor que a del 0: $-a<x<a$.
• $|x|>a$ significa que está más lejos: $x<-a$ **o** $x>a$.
Si $a\leq 0$: $|x|<a$ no tiene solución y $|x|>a$ se cumple casi siempre (para $a<0$, para todo x).

$$|x|<a \iff -a<x<a \qquad |x|>a \iff x<-a \text{ o } x>a \qquad (a>0)$$

EJEMPLO:

• $|x-2|<3 \Rightarrow -3<x-2<3 \Rightarrow -1<x<5$: solución $(-1,5)$ (los números a menos de 3 unidades de 2).
• $|2x+1|\geq 5 \Rightarrow 2x+1\leq -5$ o $2x+1\geq 5 \Rightarrow x\leq -3$ o $x\geq 2$: solución $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$.

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

DEFINICIÓN

Sistema de inecuaciones con una incógnita

Un **sistema de inecuaciones** con una incógnita es un conjunto de varias inecuaciones en la misma incógnita que deben cumplirse **a la vez**. Su solución es la **intersección** de las soluciones de cada una.

$$\begin{cases} f_1(x)\ \square\ 0 \\ f_2(x)\ \square\ 0 \end{cases} \qquad S=S_1\cap S_2$$

EJEMPLO:

$\begin{cases} 2x-1>3 \\ x+4\leq 9 \end{cases}$ pide x que cumpla las dos inecuaciones a la vez.

PROCEDIMIENTO

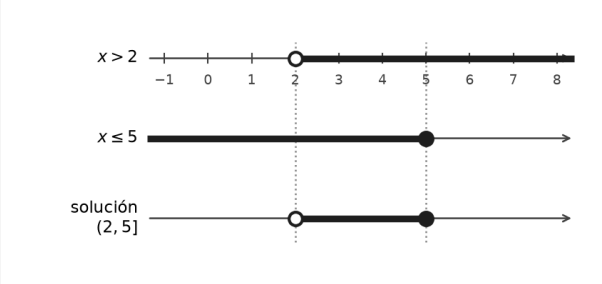
Resolución de un sistema de inecuaciones

1. **Resuelve cada inecuación** por separado y escribe su solución como intervalo.
2. **Represéntalas** en rectas numéricas alineadas.
3. La solución del sistema es la **parte común** (intersección). Si no hay parte común, el sistema no tiene solución.

EJEMPLO:

- $\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 4 \leq 9 \end{cases}$: de la primera, $2x > 4 \Rightarrow x > 2$; de la segunda, $x \leq 5$.

Intersección: $(2, 5]$.



- $\begin{cases} 3x + 2 \geq -4 \\ -x + 1 > -2 \end{cases}$: $3x \geq -6 \Rightarrow x \geq -2$; $-x > -3 \Rightarrow x < 3$ (se invierte el sentido).

Solución: $[-2, 3)$.

- $\begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$: ningún número es menor que 1 y mayor que 3 a la vez. Sin solución: $\emptyset$.
- Con una inecuación de segundo grado: $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$: la primera da $[-2, 2]$ y la segunda $(1, +\infty)$. Solución: $(1, 2]$.

Inecuaciones lineales con dos incógnitas

DEFINICIÓN

Inecuación lineal con dos incógnitas

Es una desigualdad en la que aparecen x e y con exponente 1. Una **solución** es cualquier par (x, y) que la cumple. Hay infinitas soluciones y, en el plano, llenan un **semiplano**: una de las dos mitades en que una recta divide el plano.

$$ax + by \leq c \qquad ax + by \geq c \qquad ax + by < c \qquad ax + by > c$$

EJEMPLO:

Sea $2x + y \leq 4$.

- $(0, 0)$ es solución: $2 \cdot 0 + 0 = 0 \leq 4$ ✓
- $(3, 1)$ no lo es: $2 \cdot 3 + 1 = 7 > 4$ ✗

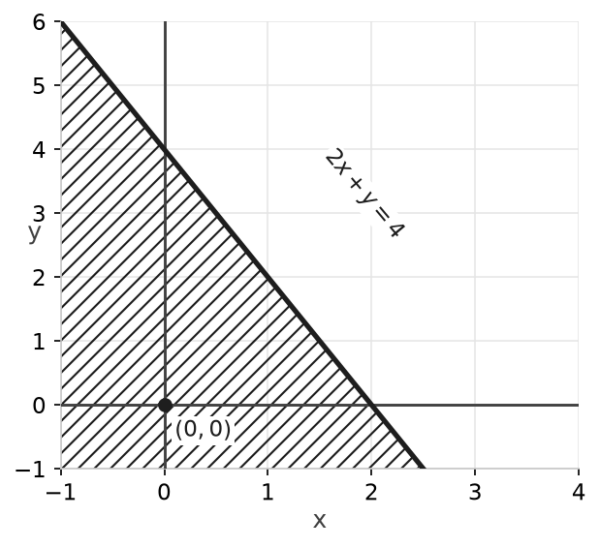
PROCEDIMIENTO

Cómo representar una inecuación

1. Dibuja la **recta frontera**, cambiando el signo de la desigualdad por $=$ (basta con dos puntos, por ejemplo los cortes con los ejes).
2. Trázala **continua** si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$ (los puntos de la recta son solución) y **discontinua** si es $<$ o $>$ (no lo son).
3. Elige un **punto de prueba** que no esté en la recta (el $(0,0)$ si no pasa por él) y sustitúyelo: si cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que lo contiene; si no, el otro.
4. Sombrea el semiplano solución.

EJEMPLO:

Representar $2x + y \leq 4$:
• Recta $2x + y = 4$: cortes $(2,0)$ y $(0,4)$.
• Trazo continuo, porque es $\leq$.
• Prueba $(0,0)$: $0 \leq 4$ es cierto → semiplano que contiene al origen (en la figura, la zona rayada).



PROCEDIMIENTO

Desigualdades estrictas

Con $<$ o $>$ la recta frontera **no pertenece** a la solución, así que se dibuja **discontinua**. El resto del método es idéntico.

EJEMPLO:

Representar $x - y > 1$:
• Recta $x - y = 1$: puntos $(1, 0)$ y $(0, -1)$, trazo discontinuo.
• Prueba $(0, 0)$: $0 > 1$ es falso → la solución es el semiplano que **no** contiene al origen, el que queda por debajo de la recta.
• Comprobación: $(3, 0)$ está por debajo y $3 - 0 = 3 > 1$ ✓

PROCEDIMIENTO

Rectas verticales, horizontales y que pasan por el origen

• $x \geq a$ es el semiplano a la derecha de la recta vertical $x = a$; $x \leq a$, a la izquierda.
• $y \geq b$ es el semiplano por encima de la recta horizontal $y = b$; $y \leq b$, por debajo.
• Si la recta frontera **pasa por el origen**, el $(0, 0)$ no sirve como punto de prueba: usa otro, por ejemplo $(1, 0)$ o $(0, 1)$.

EJEMPLO:

• $x \geq 2$: derecha de $x = 2$, recta incluida.
• $y < 3$: debajo de $y = 3$, recta no incluida.
• $x \geq 0$ e $y \geq 0$ juntas: el primer cuadrante.
• $y \geq 2x$: la recta pasa por $(0, 0)$ y $(1, 2)$. Prueba $(1, 0)$: $0 \geq 2$ es falso → solución: el semiplano de arriba, que no contiene a $(1, 0)$.

Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

DEFINICIÓN

Sistema de inecuaciones lineales

Es un conjunto de varias inecuaciones con las mismas incógnitas. Su **solución** son los pares (x, y) que cumplen **todas a la vez**; gráficamente, es la **intersección** de los semiplanos de cada inecuación.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

- $(1, 1)$ es solución: cumple las cuatro $(1 \geq 0,\ 1 \geq 0,\ 2 \leq 4,\ 1 \leq 3)$.
- $(3, 2)$ no lo es: $3 + 2 = 5 > 4$.

PROCEDIMIENTO

Resolución gráfica

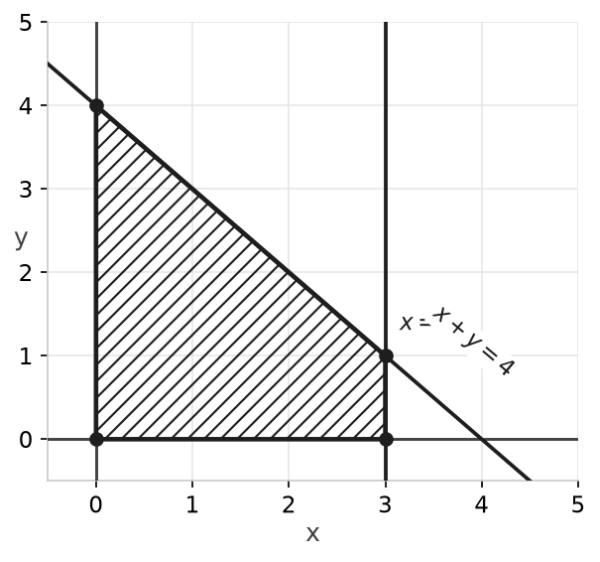
Representa cada inecuación con el método anterior sobre los mismos ejes. La solución del sistema es la **zona donde coinciden todos los semiplanos**. Truco: en vez de sombrear lo que vale, tacha lo que **no** vale en cada inecuación; lo que quede sin tachar es la solución.

EJEMPLO:

Para el sistema anterior:

- $x \geq 0$: a la derecha del eje y.
- $y \geq 0$: por encima del eje x.
- $x + y \leq 4$: bajo la recta $x + y = 4$ (prueba $(0,0)$: $0 \leq 4$ ✓).
- $x \leq 3$: a la izquierda de la recta $x = 3$.

La región es un cuadrilátero:



DEFINICIÓN

Vértices de la región

Los **vértices** son los puntos donde se cortan las rectas frontera. Para hallarlos, resuelve el sistema formado por cada pareja de rectas y **quédate solo con los puntos que cumplen todas las demás inecuaciones**: un punto de corte que se sale de la región no es vértice.

EJEMPLO:

Rectas: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 4$, $x = 3$.
- $x = 0$ e $y = 0$: $(0, 0)$ ✓
- $x = 0$ y $x + y = 4$: $(0, 4)$ ✓
- $y = 0$ y $x + y = 4$: $(4, 0)$ ✗, no cumple $x \leq 3$
- $y = 0$ y $x = 3$: $(3, 0)$ ✓
- $x + y = 4$ y $x = 3$: $(3, 1)$ ✓
- $x = 0$ y $x = 3$: son paralelas, no se cortan.

Vértices: $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(0, 4)$.

DEFINICIÓN

Región acotada, no acotada o vacía

La región de soluciones puede ser un **polígono** (región **acotada**), una zona que se extiende sin límite (**no acotada**) o no existir (**vacía**: el sistema no tiene solución).

EJEMPLO:

- Acotada: el cuadrilátero de arriba.
- No acotada: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 4$ se extiende hacia arriba y a la derecha sin fin.
- Vacía: $x + y \leq 2$ y $x + y \geq 5$ exigirían $5 \leq x + y \leq 2$, imposible.

¿Qué es la programación lineal?

DEFINICIÓN

Problema de programación lineal

La **programación lineal** busca el **máximo** o el **mínimo** de una función lineal cuando las incógnitas deben cumplir un sistema de inecuaciones. Sus elementos son:

• **Función objetivo** $f(x,y) = ax + by$: lo que queremos maximizar (beneficio) o minimizar (coste).

• **Restricciones**: las inecuaciones que limitan las variables (recursos, capacidades...). Casi siempre incluyen $x \geq 0,\ y \geq 0$.

• **Región factible**: los puntos que cumplen todas las restricciones.

• **Solución óptima**: el punto de la región factible donde f alcanza su máximo o mínimo.

$$\text{Optimizar } f(x,y) = ax + by \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

TEOREMA

Dónde está el óptimo

Si la región factible es **acotada**, f alcanza su máximo y su mínimo, y lo hace en **vértices** de la región. Si dos vértices consecutivos dan el mismo valor óptimo, también lo dan **todos los puntos del lado** que los une (infinitas soluciones). Si la región es **no acotada**, puede que no exista el máximo o el mínimo.

¿Por qué? Como f es lineal, al ir moviéndonos por la región el valor de f crece o decrece siempre en una misma dirección, y el último punto en esa dirección es una esquina.

PROCEDIMIENTO

Cómo plantear un problema

1. Define las variables x e y (qué cuentan y en qué unidades).
2. Ordena los datos, por ejemplo en una tabla.
3. Escribe una inecuación por cada limitación y añade $x \geq 0,\ y \geq 0$.
4. Escribe la función objetivo e indica si hay que maximizarla o minimizarla.

EJEMPLO:

Una pastelería hace tartas (x) y bizcochos (y). Cada tarta lleva 2 kg de harina y 1 kg de azúcar; cada bizcocho, 1 kg de harina y 2 kg de azúcar. Dispone de 10 kg de harina y 8 kg de azúcar. Gana 3 € por tarta y 2 € por bizcocho. ¿Cuántas de cada debe hacer para ganar lo máximo?

- Harina: $2x + y \leq 10$
- Azúcar: $x + 2y \leq 8$
- $x \geq 0,\ y \geq 0$
- Maximizar $f(x, y) = 3x + 2y$

Método analítico (vértices)

PROCEDIMIENTO

Pasos

1. Plantea el problema y representa la región factible.
2. Calcula sus **vértices** resolviendo los sistemas de las rectas frontera y descartando los que incumplen alguna restricción.
3. **Evalúa** f en cada vértice.
4. Elige el mayor valor (máximo) o el menor (mínimo).
5. Interpreta el resultado en el contexto del problema.

EJEMPLO:

Pastelería ($2x + y \leq 10$, $x + 2y \leq 8$, $x, y \geq 0$; $f = 3x + 2y$):
- Ejes: $(0,0)$ ✓
- $y = 0$ y $2x + y = 10$: $(5,0)$ ✓ $(5 + 0 \leq 8)$
- $y = 0$ y $x + 2y = 8$: $(8,0)$ ✗ $(2 \cdot 8 = 16 > 10)$
- $x = 0$ y $x + 2y = 8$: $(0,4)$ ✓ $(0 + 4 \leq 10)$
- $x = 0$ y $2x + y = 10$: $(0,10)$ ✗ $(0 + 20 > 8)$
- Las dos rectas: de $y = 10 - 2x$ sale $x + 20 - 4x = 8$, luego $x = 4$, $y = 2$: $(4,2)$ ✓

vértice	$f = 3x + 2y$
$(0,0)$	0
$(5,0)$	15
$(0,4)$	8
$(4,2)$	16

Máximo: 16 € en $(4,2)$, es decir, 4 tartas y 2 bizcochos. **Mínimo:** 0 en $(0,0)$ (no hacer nada).

Método gráfico

PROCEDIMIENTO

De la función objetivo a la recta a dibujar

Para ver cómo se comporta f sobre el plano, **igualamos la función objetivo a un valor** y **despejamos** y. Obtenemos una recta $y = mx + n$ que dibujamos sobre los ejes. Cada valor distinto da una recta **paralela** (misma pendiente $m = -a/b$), y todos los puntos de una de ellas dan el mismo valor de f. Empezamos por $f = 0$ (pasa por el origen) y la **desplazamos paralelamente** por la región: el primer y el último punto que toca son el mínimo y el máximo.

$$ax + by = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x$$

EJEMPLO:

Con $f(x, y) = 3x + 2y$:
• Igualamos a 0: $3x + 2y = 0$, y despejando, $y = -\frac{3}{2}x$. Es la recta que dibujamos (pasa por $(0, 0)$ y por $(2, -3)$).
• Si la igualamos a otro valor, p. ej. $3x + 2y = 15$, queda $y = \frac{15-3x}{2}$: misma pendiente $-\frac{3}{2}$, y pasa por $(5, 0)$.
Todas son paralelas; las que están más arriba y a la derecha dan valores mayores de f.

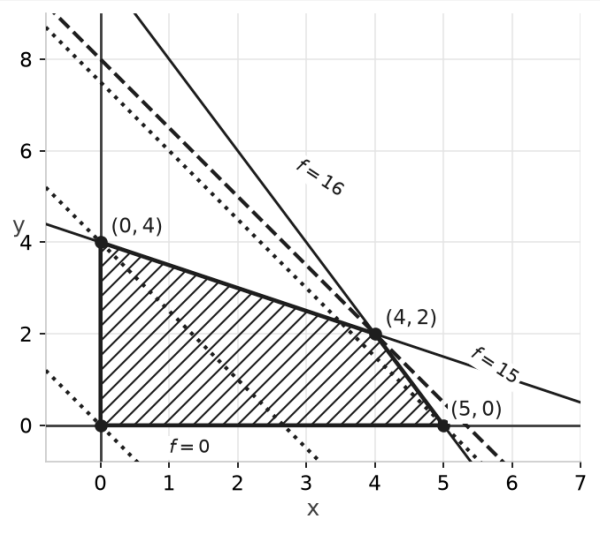
PROCEDIMIENTO

Pasos (maximizar)

1. Representa la región factible.
2. Iguala f a 0, despeja y y dibuja esa recta.
3. Desplázala paralelamente en el sentido en que f crece (compruébalo evaluando f en dos puntos).
4. El **último** vértice (o lado) que toca antes de salir de la región es el **máximo**; el **primero**, el **mínimo**.
5. Halla las coordenadas de ese vértice resolviendo el sistema de sus dos rectas y calcula f en él.

EJEMPLO:

Pastelería: región de vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $(4,2)$, $(0,4)$.
• La recta $y=-\frac{3}{2}x$, de $3x+2y=0$ (punteada), toca la región por primera vez en $(0,0)$: **mínimo** $f=0$.
• Al desplazarla pasa por $(0,4)$ ($f=8$), por $(5,0)$ ($f=15$, punteada) y la última recta que corta la región es la que pasa por $(4,2)$ (discontinua): **máximo** $f=3\cdot 4+2\cdot 2=16$.



PROCEDIMIENTO

Región no acotada: minimizar

En una región no acotada, mira hacia dónde crece f. Si la recta paralela puede avanzar sin fin dentro de la región en el sentido que mejora f, **ese óptimo no existe**; el otro suele alcanzarse en un vértice.

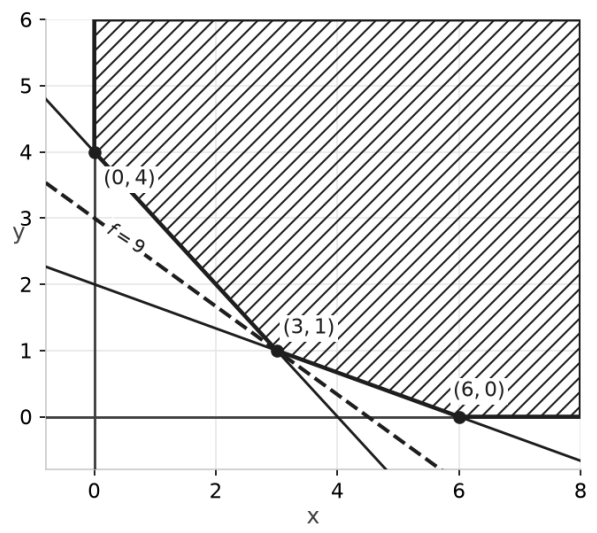
EJEMPLO:

Minimizar $f = 2x + 3y$ con $x + y \geq 4$, $x + 3y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

- Vértices: $(0,4)$, $(6,0)$ y el corte de $x + y = 4$ con $x + 3y = 6$: restando, $2y = 2$, $y = 1$, $x = 3$ → $(3,1)$.
- $f(0,4) = 12$, $f(3,1) = 9$, $f(6,0) = 12$.

Mínimo: 9 en $(3,1)$ (la recta discontinua $2x + 3y = 9$ es la primera en tocar la región).

No hay máximo: $f(0,100) = 300$, $f(0,1000) = 3000\ldots$ crece sin límite.



Casos especiales

OBSERVACIÓN

Infinitas soluciones

Si la recta de f es **paralela a un lado** de la región, todos los puntos de ese lado son óptimos.

EJEMPLO:

Maximizar $f = x + 2y$ en la región de la pastelería. $f(0,0) = 0$, $f(5,0) = 5$, $f(0,4) = 8$, $f(4,2) = 8$.
Hay dos vértices con el máximo 8: el lado que los une está sobre la recta $x + 2y = 8$ (la misma dirección que f), así que **todos los puntos de ese segmento** son óptimos.

OBSERVACIÓN

Sin solución

No hay solución cuando la región factible es **vacía** o cuando es **no acotada** y f mejora indefinidamente.

EJEMPLO:

Maximizar $f = x + y$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 4$: la región es no acotada y $f(100,0) = 100$, $f(1000,0) = 1000\ldots$ no hay máximo.

PROCEDIMIENTO

Soluciones enteras

Si x e y cuentan objetos (tartas, personas...) deben ser **enteros**. Si el vértice óptimo ya es entero, es la solución. Si no, hay que buscar entre los **puntos enteros de la región** cercanos al vértice. Redondear sin comprobar puede salirse de la región.

EJEMPLO:

Maximizar $f = x + y$ con $2x + y \leq 7$, $x + 2y \leq 7$, $x, y \geq 0$ (enteros).
• El vértice óptimo es $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (resolviendo $2x + y = 7$ con $x + 2y = 7$), con $f = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$, no entero.
• Redondear a $(3, 3)$ no vale: $2 \cdot 3 + 3 = 9 > 7$.
• Entre los puntos enteros de la región, el mayor valor posible es $f = 4$, que se alcanza en $(1, 3)$, $(2, 2)$ y $(3, 1)$.

OBSERVACIÓN

Errores frecuentes

• Olvidar las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$.
• Dar por vértice un punto de corte que incumple alguna restricción.
• Usar el origen como punto de prueba cuando la recta pasa por él.
• Quedarse con el vértice que da el valor máximo cuando el problema pide **minimizar** (o al revés).
• No interpretar el resultado: la respuesta debe decir cuántas unidades de cada cosa y cuál es el valor de f.

RESUMEN

1. Inecuaciones y programación lineal

Desigualdades

Al multiplicar o dividir por un número **negativo**, cambia el sentido.

$$a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc \qquad a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

Primer grado

Se resuelve como una ecuación, cuidando el sentido. La solución es un intervalo.

Segundo grado, polinómicas y racionales

Todo a un miembro, factorizar, hallar raíces (y polos) y estudiar el signo en cada intervalo con una tabla. Los polos nunca entran en la solución.

Valor absoluto

Para $a > 0$:

$$|x| < a \iff -a < x < a \qquad |x| > a \iff x < -a \text{ o } x > a$$

Sistemas

Con una incógnita: intersección de las soluciones. Con dos: se dibuja cada recta frontera (discontinua si es estricta), se prueba un punto para elegir el semiplano y la solución es la zona común.

Programación lineal

Si la región factible es acotada, el máximo y el mínimo se alcanzan en vértices. Método analítico: evaluar f en cada vértice. Gráfico: desplazar la recta $ax + by = 0$.

$$\text{Optimizar } f(x, y) = ax + by \text{ sujeto a las restricciones}$$

Casos especiales

Dos vértices óptimos → infinitas soluciones (todo el lado). Región vacía, o no acotada en la dirección de mejora → sin solución.

ÍNDICE DE CONCEPTOS

D

Desigualdad DEFINICIÓN 3
Dónde está el óptimo TEOREMA 20

I

Inecuación de segundo grado DEFINICIÓN 8
Inecuación lineal con dos incógnitas DEFINICIÓN 14
Inecuación polinómica y racional DEFINICIÓN 10
Inecuación y solución DEFINICIÓN 6
Intervalo DEFINICIÓN 4

P

Problema de programación lineal DEFINICIÓN 20

R

Región acotada, no acotada o vacía DEFINICIÓN 19

S

Signo de una función cuadrática TEOREMA 8
Sistema de inecuaciones con una incógnita DEFINICIÓN 12
Sistema de inecuaciones lineales DEFINICIÓN 17

U

Unión e intersección de intervalos DEFINICIÓN 5

V

Valor absoluto e inecuaciones DEFINICIÓN 12
Vértices de la región DEFINICIÓN 19