ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Matrices **3**

¿Qué es una matriz? 3
Matriz traspuesta y matriz identidad 7
Suma y resta de matrices 8
Producto por un escalar 10
Producto de matrices 11
Rango de una matriz (método de Gauss) 13
Matriz inversa 16
Ecuaciones matriciales 21

2. Determinantes **23**

¿Qué es un determinante? 23
Determinantes de orden 2 y 3 24
Determinantes de cualquier orden 25
Propiedades de los determinantes 27
Cálculo práctico: hacer ceros 30
Rango de una matriz por determinantes 31
Matriz inversa por determinantes 33

3. Sistemas de ecuaciones **36**

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales? 36
Expresión matricial 38
Clasificación de los sistemas 40
Método de Gauss 41
Teorema de Rouché-Frobenius 44
Regla de Cramer 46

Resumen **49**

Índice de conceptos **52**

TEMA 1

MATRICES

Tipos de matrices y operaciones: suma, producto por un escalar y producto de matrices. Rango por Gauss, matriz inversa y ecuaciones matriciales.

¿Qué es una matriz?

DEFINICIÓN

Matriz

Una **matriz** es una tabla rectangular de números ordenados en **filas** (líneas horizontales) y **columnas** (líneas verticales), encerrados entre paréntesis. Las matrices se nombran con letras mayúsculas (A, B, C...) y sus elementos con la misma letra en minúscula.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

es una matriz con 2 filas y 3 columnas.

DEFINICIÓN

Dimensión de una matriz

La **dimensión** (u orden) de una matriz indica cuántas filas y cuántas columnas tiene. Se escribe $m \times n$ (se lee «m por n»): **primero siempre las filas** y después las columnas.

$$\text{dimensión} = \underbrace{m}_{\text{filas}} \times \underbrace{n}_{\text{columnas}}$$

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Tiene 2 filas y 3 columnas, luego su dimensión es 2×3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Tiene 3 filas y 1 columna: dimensión 3×1.

DEFINICIÓN

Elementos de una matriz: a_{ij}

Cada número de la matriz se llama **elemento** y se nombra con dos subíndices: a_{ij}. El **primer subíndice** i **indica la fila** y el **segundo** j **indica la columna** en la que está. Para localizarlo: bajamos hasta la fila i y avanzamos hasta la columna j.

$$a_{ij} \to \text{fila } i, \text{ columna } j$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- a_{12}: fila 1, columna 2 → $a_{12} = -1$
- a_{21}: fila 2, columna 1 → $a_{21} = 3$
- a_{23}: fila 2, columna 3 → $a_{23} = 4$

DEFINICIÓN

Tipos de matrices según su forma

Matriz fila: tiene una sola fila $(1 \times n)$.
Matriz columna: tiene una sola columna $(m \times 1)$.
Matriz cuadrada: tiene el mismo número de filas que de columnas $(n \times n)$; se dice que es de **orden** n.
Matriz nula: todos sus elementos son 0; se representa por O.

EJEMPLO:

Fila: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Columna: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Cuadrada de orden 2: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ Nula: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

DEFINICIÓN

Diagonal principal

En una matriz cuadrada, la **diagonal principal** está formada por los elementos cuya fila y columna coinciden: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ Va desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

La diagonal principal es $4, -3, 9$.

DEFINICIÓN

Igualdad de matrices

Dos matrices son **iguales** si tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan la misma posición son iguales. Esto permite plantear ecuaciones igualando elemento a elemento.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ -1 & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Igualando posición a posición: $x = 5$ y $y + 1 = 4 \Rightarrow y = 3$.

DEFINICIÓN

Matrices cuadradas especiales

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

• **Diagonal**: todos los elementos fuera de la diagonal principal son 0.

• **Triangular superior** (inferior): todos los elementos por debajo (por encima) de la diagonal principal son 0.

• **Simétrica**: coincide con su traspuesta, $a_{ij} = a_{ji}$ (es simétrica respecto de la diagonal principal).

$$A \text{ simétrica} \iff A^t = A \iff a_{ij} = a_{ji}$$

EJEMPLO:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

D es diagonal, T es triangular superior y S es simétrica ($a_{12} = a_{21} = 7$, $a_{13} = a_{31} = -2$, $a_{23} = a_{32} = 3$).

Matriz traspuesta y matriz identidad

DEFINICIÓN

Matriz traspuesta: A^t

La **traspuesta** de A, que se escribe A^t, es la matriz que se obtiene al **cambiar filas por columnas**: la fila 1 pasa a ser la columna 1, la fila 2 pasa a ser la columna 2, etc. Si A es de dimensión $m \times n$, su traspuesta es de dimensión $n \times m$.

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- La fila 1 $(2, -1, 0)$ se escribe como columna 1.
- La fila 2 $(3, 5, 4)$ se escribe como columna 2.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A es 2×3 y A^t es 3×2.

PROPIEDAD

Propiedades de la traspuesta

Fíjate en la última: al trasponer un producto, **se invierte el orden** de los factores.

$$(A^t)^t = A \qquad (A + B)^t = A^t + B^t \qquad (k \cdot A)^t = k \cdot A^t \qquad (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

DEFINICIÓN

Matriz identidad: I

La **matriz identidad** I_n es una matriz cuadrada de orden n con **unos en la diagonal principal** y **ceros en el resto** de posiciones. Es el «1» de las matrices: al multiplicar cualquier matriz por la identidad (con dimensiones compatibles) la matriz no cambia (ver *Producto de matrices*).

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

EJEMPLO:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Suma y resta de matrices

DEFINICIÓN

Suma y resta: condición

Solo se pueden sumar o restar matrices que tengan **la misma dimensión** (mismo número de filas y mismo número de columnas).

EJEMPLO:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ → **no se puede** calcular: la primera es 2×2 y la segunda 2×3.

DEFINICIÓN

Suma y resta de matrices

Se suman (o restan) los elementos que ocupan **la misma posición**. El resultado tiene la misma dimensión que las matrices de partida.

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Suma:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+1 \\ 3+(-1) & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Resta (cuidado con los signos):

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-4 & -2-1 \\ 3-(-1) & 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD

Propiedades de la suma

Conmutativa: $A + B = B + A$
Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
Elemento neutro: la matriz nula, $A + O = A$
Elemento opuesto: $-A$ (se cambia el signo de todos los elementos), $A + (-A) = O$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Producto por un escalar

DEFINICIÓN

Producto de un escalar por una matriz

Para multiplicar un número k (escalar) por una matriz, se multiplica **cada elemento** de la matriz por ese número. La dimensión no cambia.

$$(k \cdot A)_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

EJEMPLO:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

PROCEDIMIENTO

Combinando operaciones

Primero se multiplican los escalares y después se suman o restan las matrices resultantes.

EJEMPLO:

Con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula $2A - 3B$:

Paso 1:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3B = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Paso 2:

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 - 12 & -4 - 3 \\ 6 - (-3) & 0 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD

Propiedades del producto por un escalar

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B \qquad (k + h) \cdot A = k \cdot A + h \cdot A \qquad k \cdot (h \cdot A) = (k \cdot h) \cdot A \qquad 1 \cdot A = A$$

Producto de matrices

DEFINICIÓN

Producto de matrices: cuándo se pueden multiplicar

Dos matrices A y B se pueden multiplicar (en ese orden, $A \cdot B$) solo si **el número de columnas de A es igual al número de filas de B**. Truco: escribe las dimensiones una al lado de la otra; **las de dentro deben coincidir** y **las de fuera dan la dimensión del resultado**.

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

EJEMPLO:

- A es 2×3 y B es 3×2 → $A\cdot B$ **sí** se puede y el resultado es 2×2.
- En el orden contrario, $B\cdot A$: 3×2 por 2×3 → también se puede, pero el resultado es 3×3.
- A es 2×3 y C es 2×2 → $A\cdot C$ **no** se puede ($3\neq 2$), pero $C\cdot A$ sí (2×2 por 2×3 da 2×3).

DEFINICIÓN

Producto de matrices: cálculo de cada elemento

El elemento c_{ij} del resultado (fila i, columna j) es el **producto escalar de la fila i de A por la columna j de B**: se multiplica el primer elemento de la fila por el primero de la columna, el segundo por el segundo, etc., y se **suman** todos esos productos. Por eso las columnas de A tienen que coincidir con las filas de B: si no, sobrarían o faltarían números al emparejarlos.

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A)\cdot(\text{columna } j \text{ de } B) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo resuelto paso a paso

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Dimensiones: A es 2×3 y B es 3×2 → se pueden multiplicar y $A \cdot B$ será 2×2.

2. Elemento a elemento:

- c_{11} = fila 1 · columna 1 = $(1,2,0) \cdot (2,0,-1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2$
- c_{12} = fila 1 · columna 2 = $(1,2,0) \cdot (1,3,5) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 7$
- c_{21} = fila 2 · columna 1 = $(3,-1,4) \cdot (2,0,-1) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 2$
- c_{22} = fila 2 · columna 2 = $(3,-1,4) \cdot (1,3,5) = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 20$

3. Resultado:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD

El producto no es conmutativo

En general, $A \cdot B \neq B \cdot A$. **El orden importa**: a veces uno de los dos productos ni siquiera se puede hacer, y aunque se puedan hacer los dos, el resultado suele ser distinto.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

DEFINICIÓN

Potencia de una matriz

Solo para matrices cuadradas: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, etc. **Ojo**: A^2 no se obtiene elevando cada elemento al cuadrado.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD

Propiedades del producto

Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Elemento neutro: $A \cdot I = I \cdot A = A$
No conmutativa: en general $A \cdot B \neq B \cdot A$

Rango de una matriz (método de Gauss)

DEFINICIÓN

¿Qué es el rango?

Una fila es **combinación lineal** de otras si se puede obtener sumando múltiplos de ellas; en ese caso no aporta información nueva. Las filas que no son combinación lineal de las demás son **linealmente independientes**.

El **rango** de una matriz, $\text{rg}(A)$, es el **número de filas linealmente independientes** (coincide con el número de columnas linealmente independientes). Por eso nunca puede superar el número de filas ni el de columnas.

$$\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$$

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La fila 1 es el doble de la fila 2 ($F_1 = 2F_2$), así que solo hay una fila independiente: $\text{rg} = 1$.

DEFINICIÓN

Operaciones elementales por filas

El método de Gauss transforma la matriz usando estas operaciones, que **no cambian el rango**:

1. **Intercambiar** dos filas: $F_1 \leftrightarrow F_2$
2. **Multiplicar** una fila por un número distinto de 0: $F_2 \to 3F_2$
3. **Sumar a una fila un múltiplo de otra**: $F_2 \to F_2 - 2F_1$

PROCEDIMIENTO

Método de Gauss: paso a paso

El objetivo es conseguir una **matriz escalonada**: cada fila empieza con más ceros que la anterior.

1. Toma como pivote el primer elemento de la fila 1 (si es 0, intercambia filas).

2. Haz ceros debajo de él con operaciones del tipo $F_i \to F_i - k \cdot F_1$.

3. Repite con la fila 2 (haz ceros debajo del segundo elemento), luego con la fila 3, etc.

4. El **rango es el número de filas que no son todo ceros**.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo 1: rango 2

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 1: hacemos ceros en la primera columna, debajo del 1:

$$\xrightarrow{F_2 - 2F_1,\ F_3 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, $F_2 - 2F_1 = (2-2,\ 5-4,\ 1+2) = (0, 1, 3)$.

Paso 2: hacemos ceros en la segunda columna, debajo del 1 de la fila 2:

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3: quedan 2 filas no nulas → $\text{rg}(A) = 2$.

(La fila 3 original era combinación de las otras: $F_3 = F_1 + F_2$).

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo 2: rango 3

EJEMPLO:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 1:

$$\xrightarrow{F_2 - 2F_1,\ F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 2:

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Paso 3: las 3 filas son no nulas → $\text{rg}(B) = 3$.

Matriz inversa

DEFINICIÓN

¿Qué es la matriz inversa?

La **inversa** de una matriz cuadrada A es otra matriz, A^{-1}, que multiplicada por A da la identidad. Hace el papel de «dividir» en las matrices, que no tienen división.

No todas las matrices tienen inversa. Una matriz cuadrada de orden n tiene inversa (es **regular** o invertible) solo si su rango es n. Si no tiene inversa se llama **singular**.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \qquad A^{-1} \text{ existe} \iff \operatorname{rg}(A) = n$$

PROCEDIMIENTO

Método 1: resolviendo un sistema

Escribimos la inversa con incógnitas, $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, imponemos que $A\cdot A^{-1}=I$ e igualamos elemento a elemento. Obtenemos dos sistemas de ecuaciones sencillos.

EJEMPLO:

Calcula la inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Paso 1: planteamos $A\cdot A^{-1}=I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 2: multiplicamos (fila por columna):

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: igualamos elemento a elemento. Salen dos sistemas: uno con a, c (primera columna) y otro con b, d (segunda columna):

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 5a+3c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b+d=0 \\ 5b+3d=1 \end{cases}$$

Paso 4: resolvemos.

• Primer sistema: de la 1.ª, $c=1-2a$. Sustituyendo: $5a+3(1-2a)=0\Rightarrow -a+3=0\Rightarrow a=3$, y $c=1-6=-5$.

• Segundo sistema: de la 1.ª, $d=-2b$. Sustituyendo: $5b+3(-2b)=1\Rightarrow -b=1\Rightarrow b=-1$, y $d=2$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 5: comprobamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN

Cuando no existe la inversa

Si alguno de los sistemas es **incompatible** (no tiene solución), la matriz no tiene inversa.

EJEMPLO:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Planteando $A \cdot A^{-1} = I$, la primera columna da:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 2a + 4c = 0 \end{cases}$$

La 2.ª ecuación es el doble de $a + 2c$, así que diría $2 \cdot 1 = 0$: imposible. A no tiene inversa (de hecho $F_2 = 2F_1$, su rango es 1).

PROCEDIMIENTO

Método 2: Gauss-Jordan

1. Escribimos la matriz ampliada $(A \mid I)$: la matriz A a la izquierda y la identidad a la derecha.
2. Con operaciones elementales por filas (aplicadas a **toda la fila**, ambos lados), hacemos ceros **debajo** de la diagonal (como en Gauss).
3. Después hacemos ceros **encima** de la diagonal, empezando por la última columna.
4. Dividimos cada fila por su elemento de la diagonal para que queden unos.
5. Cuando a la izquierda queda I, a la derecha tenemos A^{-1}.
Si en algún momento aparece una fila de ceros en la parte izquierda, la matriz **no tiene inversa**.

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{operaciones por filas}} (I \mid A^{-1})$$

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo Gauss-Jordan (2×2)

EJEMPLO:

Misma matriz que antes, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Paso 1: matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 2: cero debajo de la diagonal:

$$\xrightarrow{F_2 \to 2F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

Paso 3: cero encima de la diagonal:

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

Paso 4: unos en la diagonal:

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

Paso 5:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

El mismo resultado que con el sistema.

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo Gauss-Jordan (3×3)

EJEMPLO:

Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Paso 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 2: ceros debajo de la diagonal (primero la columna 1, luego la 2):

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 3: ceros encima de la diagonal (primero la columna 3, luego la 2):

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 4: la diagonal ya tiene unos, no hay que dividir.

Paso 5:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD

Propiedades de la inversa

Igual que con la traspuesta, la inversa de un producto **invierte el orden** de los factores.

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \qquad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Ecuaciones matriciales

PROCEDIMIENTO

Cómo despejar la matriz incógnita X

Se despeja X como en una ecuación normal, pero **no se puede dividir entre matrices**: en su lugar se **multiplica por la inversa**. Como el producto no es conmutativo, hay que multiplicar **por el mismo lado** en el que está la matriz que queremos quitar:

- Si A está a la **izquierda** de X, multiplicamos por A^{-1} por la izquierda.
- Si A está a la **derecha** de X, multiplicamos por A^{-1} por la derecha.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \qquad X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

EJEMPLO:

Error típico: de $A \cdot X = B$ escribir $X = B \cdot A^{-1}$. ¡Está mal! A^{-1} tiene que ir a la izquierda.

PROCEDIMIENTO

Ejemplo resuelto paso a paso

Si la matriz A no tuviera inversa, también se puede plantear $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, multiplicar e igualar elemento a elemento, como hicimos en el método del sistema para la inversa.

EJEMPLO:

Resuelve $A \cdot X + B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 1: despejamos el término con X (pasamos B restando):

$$A \cdot X = C - B$$

Paso 2: calculamos $C - B$:

$$C - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-2 \\ 10-(-1) & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: A está a la izquierda de X, así que multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en ambos lados:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

Paso 4: calculamos A^{-1} (ya la obtuvimos en la sección anterior):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 5: multiplicamos:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-11 & 3-2 \\ -20+22 & -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 6: comprobamos que $A \cdot X + B = C$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

TEMA 2

DETERMINANTES

Determinante de una matriz cuadrada: orden 2, regla de Sarrus y desarrollo por adjuntos. Propiedades, rango por menores y matriz inversa por la adjunta.

¿Qué es un determinante?

DEFINICIÓN

Determinante de una matriz cuadrada

El **determinante** de una matriz cuadrada A es un **número real** que se asocia a ella y se escribe $|A|$ o $\det(A)$; en la notación se usan **barras verticales** en lugar de paréntesis. **Solo las matrices cuadradas** tienen determinante. Se define por orden:

- Orden 1: $|(a)| = a$.
- Orden 2: producto de la diagonal principal menos producto de la secundaria.
- Orden $n \geq 3$: se reduce a determinantes de orden $n-1$ mediante el desarrollo por adjuntos (secciones siguientes). Para orden 3 existe además la regla de Sarrus.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad |A| \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

Error típico: confundir la matriz con su determinante. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ es una tabla de números; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1$ es un solo número.

Determinantes de orden 2 y 3

DEFINICIÓN

Determinante de orden 2

El determinante de orden 2 es el producto de la **diagonal principal** menos el producto de la **diagonal secundaria**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23$$

Cuidado con los signos: se resta el producto $(-2) \cdot 4 = -8$, así que queda $+8$.

PROCEDIMIENTO

Determinante de orden 3: regla de Sarrus

Se suman los productos de la **diagonal principal y sus dos «paralelas»** (triángulos con un lado paralelo a la diagonal principal) y se restan los de la **diagonal secundaria y sus dos «paralelas»**.
Truco: copia las dos primeras columnas a la derecha de la matriz; así las seis diagonales quedan enteras y se leen de un tirón.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

EJEMPLO:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Términos positivos: $1 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot 1 = 0 - 8 - 3 = -11$

Términos negativos: $(-1) \cdot 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0 + 2 + 24 = 26$

$$|A| = -11 - 26 = -37$$

Determinantes de cualquier orden

DEFINICIÓN

Menor complementario: α_{ij}

El **menor complementario** del elemento a_{ij} es el determinante que queda al **tachar la fila i y la columna j** de la matriz. Si la matriz es de orden n, el menor es un determinante de orden $n-1$.

$$\alpha_{ij} = \text{determinante tras eliminar la fila } i \text{ y la columna } j$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Menor de $a_{12} = 2$: tachamos la fila 1 y la columna 2:

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16$$

DEFINICIÓN

Adjunto: A_{ij}

El **adjunto** de a_{ij} es su menor complementario con un **signo** que depende de la posición: $+$ si $i+j$ es par y $-$ si $i+j$ es impar. Los signos se alternan como en un tablero de ajedrez, empezando por $+$ arriba a la izquierda.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

Con la matriz A anterior:

- $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 16 = -16$
- A_{23}: tachamos fila 2 y columna 3, $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$, y como $2+3=5$ es impar, $A_{23} = -5$.
- A_{21}: $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9$, luego $A_{21} = -9$.

TEOREMA

Desarrollo por una fila o columna (Laplace)

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la **suma de los productos de los elementos de una fila (o de una columna) por sus adjuntos**. Da igual qué fila o columna se elija: el resultado es el mismo. Por eso conviene elegir la que tenga **más ceros**, porque esos términos no hay que calcularlos.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (\text{por la fila } i)$$

EJEMPLO:

Desarrollamos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ por la fila 2, que tiene un 0:

$$|A| = 3 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} = 3 \cdot (-9) + 0 + 2 \cdot (-5) = -27 - 10 = -37$$

El mismo resultado que con Sarrus.

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo: orden 4 con una columna casi nula

EJEMPLO:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La columna 3 solo tiene un elemento distinto de 0, $b_{33} = 1$. Desarrollando por esa columna solo queda un término (signo $+$, porque $3+3$ es par):

$$|B| = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Por Sarrus: $(0 + 8 + 6) - (0 + 8 + 1) = 14 - 9 = 5$, luego $|B| = 5$.

Propiedades de los determinantes

PROPIEDAD

Intercambiar dos filas o columnas

Si se intercambian dos filas (o dos columnas), el determinante **cambia de signo**.

EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Comprobación: $4 + 16 = 20$ y $-(-16 - 4) = 20$.

PROPIEDAD

Filas iguales, proporcionales o combinación lineal

Si dos filas (o dos columnas) son **iguales** o **proporcionales**, o una es **combinación lineal** de otras, el determinante vale **0**. *Razón (filas iguales):* al intercambiarlas la matriz no cambia, pero el determinante cambia de signo, luego $|A| = -|A|$ y por tanto $|A| = 0$.

EJEMPLO:

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ porque $F_1 = F_3$.
- $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ porque $F_1 = 2F_2$.

PROPIEDAD

Multiplicar una fila por un número

Si se multiplica **una fila** (o una columna) por un número k, el determinante resultante es el determinante original **multiplicado por** k.

EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6 = 3 \cdot 2$$

PROPIEDAD

Sumar a una fila un múltiplo de otra

Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un número, **el determinante no cambia**. Así se pueden **hacer ceros** sin modificar su valor.

$$F_i \to F_i + k \cdot F_j \Rightarrow \text{el determinante no varía}$$

EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{3}{2}F_1} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 0 & \frac{27}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Ambos valen -52. Por ejemplo, $F_2 - \frac{3}{2}F_1 = \left(3-3,\ 6+\frac{15}{2},\ 8-9\right) = \left(0, \frac{27}{2}, -1\right)$.

PROPIEDAD

Determinante de $k \cdot A$

Si se multiplica **toda la matriz** por k, se están multiplicando **todas sus filas** por k. Por la propiedad anterior, cada fila aporta un factor k, así que si la matriz es de orden n el determinante resultante es k^n por el determinante original.

$$|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ |A| = 2 \qquad |3A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 36 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

Error típico: escribir $|3A| = 3 \cdot 2 = 6$.

PROPIEDAD

Determinante de la traspuesta

Una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante, así que **da igual pensar en filas o en columnas**: todas las propiedades valen para ambas.

$$|A^t| = |A|$$

PROPIEDAD

Determinante de un producto

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, el determinante del producto es el producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

EJEMPLO:

Si $|A| = 2$ y $|B| = -3$: $|A \cdot B| = 2 \cdot (-3) = -6$.

PROPIEDAD

Determinante de la inversa

Se deduce de la propiedad anterior: como $A \cdot A^{-1} = I$ y $|I| = 1$, se tiene $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

EJEMPLO:

Si $|A| = 2$, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{2}$.

Cálculo práctico: hacer ceros

PROCEDIMIENTO

Hacer ceros antes de desarrollar

Si ninguna fila o columna tiene ceros, se fabrican: **sumar a una fila un múltiplo de otra no cambia el determinante** (propiedad anterior). Se elige un elemento que valga 1 como pivote, se hacen ceros en su columna y se desarrolla por ella (queda un único adjunto).

EJEMPLO:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Paso 1: ceros en la columna 1 usando el 1 de la fila 1:

$$\xrightarrow{F_2-2F_1,\, F_3+F_1,\, F_4-3F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Paso 2: desarrollamos por la columna 1:

$$|C| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Paso 3: Sarrus: $(-3-4+2)-(-6+2-2) = -5+6 = 1$, luego $|C| = 1$.

Rango de una matriz por determinantes

DEFINICIÓN

Menor de orden k

Un **menor de orden** k de una matriz (cuadrada o no) es el determinante de la submatriz que se forma al elegir k filas y k columnas cualesquiera.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Con las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 sale el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

TEOREMA

Rango por menores

El **rango** de una matriz es el **orden del mayor menor distinto de** 0 que se puede encontrar en ella. Coincide con el rango definido por el método de Gauss.

$$\operatorname{rg}(A) = k \iff \text{hay un menor de orden } k \text{ no nulo y todos los de orden } k+1 \text{ son nulos}$$

PROCEDIMIENTO

Método: orlar menores

Para no calcular todos los menores posibles:
1. Si la matriz no es nula, $\text{rg} \geq 1$.
2. Busca un menor de orden 2 distinto de 0 → $\text{rg} \geq 2$.
3.Orla ese menor: añádele una fila y una columna más de todas las formas posibles. Si alguno de esos menores de orden 3 es distinto de 0 → $\text{rg} \geq 3$, y se repite el proceso.
4. Si todos los menores orlados son 0, el rango es el orden del último menor no nulo.
EJEMPLO:

Con la matriz A anterior (3×4, así que $\text{rg}(A) \leq 3$):
Paso 1: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ → $\text{rg}(A) \geq 2$.
Paso 2: orlamos con la fila 3 y cada una de las columnas que quedan:

$$\text{col. 3:} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{col. 4:} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Paso 3: todos los orlados son 0 → $\text{rg}(A) = 2$.
(Tenía sentido: $F_3 = F_1 + F_2$).

PROCEDIMIENTO

Rango según un parámetro

Si la matriz es cuadrada y depende de un parámetro, se calcula su determinante, se iguala a 0 y se estudian por separado los valores que lo anulan.
EJEMPLO:

Estudia el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.
Paso 1: por Sarrus:

$$|A| = (a^2 + 1 + 1) - (a + 1 + a) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

Paso 2: $|A| = 0 \iff a = 1$.
Paso 3:
• Si $a \neq 1$: $|A| \neq 0$ → $\text{rg}(A) = 3$.
• Si $a = 1$: las tres filas son $(1,1,1)$, todos los menores de orden 2 son 0 → $\text{rg}(A) = 1$.

Matriz inversa por determinantes

TEOREMA

Matriz regular y matriz singular

Una matriz cuadrada de orden n es **regular** si tiene inversa y **singular** si no la tiene. Una matriz cuadrada es regular si y solo si su determinante es distinto de 0 (y si y solo si su rango es n). Por eso el determinante es lo primero que se calcula para saber si existe la inversa.

$$|A| \neq 0 \iff A^{-1} \text{ existe} \iff \operatorname{rg}(A) = n$$

EJEMPLO:

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$ → tiene inversa.
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$ → no tiene inversa (su rango es 1).

DEFINICIÓN

Matriz adjunta: $\operatorname{Adj}(A)$

La **matriz adjunta** de A se obtiene **sustituyendo cada elemento por su adjunto** A_{ij} (menor complementario con su signo).

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

TEOREMA

Fórmula de la inversa

Si $|A| \neq 0$, la inversa es la **traspuesta de la adjunta dividida entre el determinante**. Si $|A| = 0$, la matriz no tiene inversa: conviene calcular el determinante **lo primero**.
Da igual trasponer antes o después: $(\text{Adj}(A))^t = \text{Adj}(A^t)$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}(A))^t$$

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo de orden 2

EJEMPLO:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Paso 1: $|A| = 6 - 5 = 1 \neq 0$ → tiene inversa.
Paso 2: adjuntos: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -5$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 3:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Truco para orden 2: se **intercambian** los elementos de la diagonal principal, se **cambia el signo** de los otros dos y se divide entre $|A|$.

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo de orden 3

EJEMPLO:

Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Paso 1: determinante por Sarrus: $(1+0+12)-(2+0+0) = 11 \neq 0$ → tiene inversa.

Paso 2: los nueve adjuntos:

- $A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$
- $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$, $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$
- $A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$, $A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Paso 3: adjunta y su traspuesta:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: dividimos entre $|A| = 11$:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 5: comprobación: $A \cdot (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = 11 \cdot I$

TEMA 3

SISTEMAS DE ECUACIONES

Sistemas de ecuaciones lineales: resolución por el método de Gauss, expresión matricial AX = B, clasificación de los sistemas, discusión con el teorema de Rouché-Frobenius y regla de Cramer.

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

DEFINICIÓN

Sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones de primer grado (las incógnitas aparecen solo elevadas a 1, sin multiplicarse entre sí) que deben cumplirse **a la vez**. Los números que multiplican a las incógnitas son los **coeficientes** y los del segundo miembro, los **términos independientes**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. El coeficiente de y en la segunda ecuación es -1 y el término independiente de la tercera es 2.

DEFINICIÓN

Solución de un sistema

Una **solución** es un conjunto de valores de las incógnitas que cumple **todas** las ecuaciones a la vez. Para comprobar una solución, se sustituye en cada ecuación: si falla en una sola, no es solución.

EJEMPLO:

¿Es $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ solución del sistema anterior?

- $1 + 2 + 3 = 6$ ✓
- $2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3$ ✓
- $1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2$ ✓

Cumple las tres, luego sí es solución.

DEFINICIÓN

Sistemas equivalentes

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Un sistema se transforma en otro equivalente si:

- Se **intercambian** dos ecuaciones.
- Se **multiplica** una ecuación por un número distinto de 0.
- Se **suma** a una ecuación otra multiplicada por un número.

En estas transformaciones se basa el método de Gauss.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} x + y = 5 \\ -2y = -4 \end{cases}$$

Ambos sistemas tienen la misma solución: $y = 2,\ x = 3$.

Expresión matricial

DEFINICIÓN

Matrices asociadas a un sistema

Todo sistema lineal se puede escribir con matrices:

• A, **matriz de coeficientes**: cada fila es una ecuación y cada columna, una incógnita.

• X, **matriz de incógnitas** (columna).

• B, **matriz de términos independientes** (columna).

• A^* (o $(A \mid B)$), **matriz ampliada**: la matriz A con la columna B añadida a la derecha.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

PROPIEDAD

¿Por qué funciona?

Al multiplicar A por X (fila por columna), cada fila de A por la columna X reproduce el primer miembro de una ecuación. Igualar el resultado a B es igualar cada ecuación a su término independiente. **Cuidado**: si falta una incógnita en una ecuación, su coeficiente es 0 y hay que escribirlo en A.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Con una incógnita que falta: $\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

PROCEDIMIENTO

Resolución con la matriz inversa

Si A es cuadrada y $|A| \neq 0$, existe A^{-1} y se despeja X multiplicando por A^{-1} **por la izquierda** en los dos miembros (el producto de matrices no es conmutativo, así que el orden importa).

$$AX = B \;\Rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$$

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $|A| = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 5 \neq 0$
- $A^{-1} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 2,\ y = 1$.

Clasificación de los sistemas

DEFINICIÓN

Según el número de soluciones

Sistema compatible determinado (SCD): tiene una única solución.
Sistema compatible indeterminado (SCI): tiene infinitas soluciones, que dependen de uno o más parámetros.
Sistema incompatible (SI): no tiene solución.
No hay más casos: un sistema lineal nunca tiene exactamente 2 o 3 soluciones.

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado (SCD): solución única} \\ \text{Indeterminado (SCI): infinitas soluciones} \end{cases} \\ \text{Incompatible (SI): sin solución} \end{cases}$$

EJEMPLO:

- SCD: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ → solo $(3,2)$.
- SCI: $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ → la segunda es el doble de la primera; vale cualquier $(5-\lambda,\lambda)$.
- SI: $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$ → $x+y$ no puede valer 5 y 7 a la vez.

PROPIEDAD

Interpretación geométrica (2 incógnitas)

Cada ecuación con dos incógnitas es una **recta** del plano y las soluciones son los puntos comunes:
- SCD: las rectas se **cortan** en un punto.
- SCI: las rectas son **coincidentes**.
- SI: las rectas son **paralelas**.

Con tres incógnitas ocurre lo mismo con **planos** del espacio.
EJEMPLO:

- $x+y=5$ y $x-y=1$: pendientes distintas, se cortan en $(3,2)$.
- $x+y=5$ y $2x+2y=10$: la misma recta.
- $x+y=5$ y $x+y=7$: misma pendiente, distinta ordenada: paralelas.

DEFINICIÓN

Sistemas homogéneos

Un sistema es **homogéneo** si todos sus términos independientes son 0. Siempre es **compatible**, porque $x = y = z = 0$ (la **solución trivial**) lo cumple. Solo puede ser SCD (únicamente la trivial) o SCI (infinitas soluciones, además de la trivial).

$$AX = O \Rightarrow X = O \text{ siempre es solución}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Además de $(0, 0)$, vale cualquier $(\lambda, -\lambda)$: es SCI.

Método de Gauss

PROCEDIMIENTO

Método de Gauss: paso a paso

Consiste en transformar el sistema en otro equivalente **escalonado** (cada ecuación tiene al menos una incógnita menos que la anterior) y resolverlo de abajo arriba.

1. Escribe la matriz ampliada A^*.

2. Con la primera fila, haz ceros debajo del primer elemento.

3. Con la segunda fila, haz ceros debajo del segundo elemento, y así sucesivamente.

4. Clasifica según la última fila y resuelve **de abajo arriba** (sustitución regresiva).

Consejo: si el primer elemento es 1, las cuentas son más sencillas; intercambia filas si hace falta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo 1: sistema compatible determinado

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Resolvemos de abajo arriba:

- $-7z=-21 \Rightarrow z=3$
- $-3y-3=-9 \Rightarrow -3y=-6 \Rightarrow y=2$
- $x+2+3=6 \Rightarrow x=1$

Solución única: $(x,y,z)=(1,2,3)$ → SCD.

PROCEDIMIENTO

Ejemplo 2: sistema compatible indeterminado

Si al escalonar aparece una fila entera de ceros $(0=0)$, esa ecuación sobraba. Quedan menos ecuaciones que incógnitas: una incógnita pasa a ser un **parámetro** (λ) y las demás se expresan en función de ella.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2z=5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última fila es $0=0$: quedan 2 ecuaciones y 3 incógnitas → SCI.

- Hacemos $z=\lambda$.
- $-3y-\lambda=-4 \Rightarrow y=\dfrac{4-\lambda}{3}$
- $x=3-y-z=3-\dfrac{4-\lambda}{3}-\lambda=\dfrac{5-2\lambda}{3}$

Solución: $\left(\dfrac{5-2\lambda}{3}, \dfrac{4-\lambda}{3}, \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, con $\lambda=1$ se obtiene $(1,1,1)$.

PROCEDIMIENTO

Ejemplo 3: sistema incompatible

Si al escalonar aparece una fila del tipo $0\,0\,0\,|\,k$ con $k \neq 0$, el sistema dice $0 = k$, que es imposible: no hay solución.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La última fila dice $0 = 1$: imposible → **SI**, no tiene solución.

PROPIEDAD

Clasificación al terminar Gauss

Mirando el sistema ya escalonado (sin filas $0 = 0$):

$$\begin{cases} \text{Aparece } 0 = k,\ k \neq 0 & \Rightarrow \text{SI} \\ \text{número de ecuaciones} = \text{número de incógnitas} & \Rightarrow \text{SCD} \\ \text{número de ecuaciones} < \text{número de incógnitas} & \Rightarrow \text{SCI} \end{cases}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

TEOREMA

Teorema de Rouché-Frobenius

Permite **clasificar** (discutir) un sistema sin resolverlo, comparando el rango de la matriz de coeficientes A, el de la ampliada A^* y el número de incógnitas n.
Un sistema es **compatible** si y solo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.
Como A^* solo tiene una columna más que A, su rango es igual o una unidad mayor.

$$\begin{cases} \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n & \Rightarrow \text{SCD} \\ \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n & \Rightarrow \text{SCI con } n - \text{rg}(A) \text{ parámetros} \\ \text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*) & \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

EJEMPLO:

Con 3 incógnitas:
- $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*)$ → SCD.
- $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A^*)$ → SCI con $3 - 2 = 1$ parámetro.
- $\text{rg}(A) = 2$, $\text{rg}(A^*) = 3$ → SI.

PROCEDIMIENTO

Aplicación con determinantes

Si el sistema tiene tantas ecuaciones como incógnitas, se empieza por $|A|$:

• Si $|A| \neq 0$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$ → SCD.

• Si $|A| = 0$: se calcula el rango de A con un menor más pequeño y se **orla** ese menor con la columna de términos independientes para hallar el rango de A^*.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2z = 6 \end{cases}$$

• $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 0 + 3 - 0 - 4 = 0$ → $\text{rg}(A) < 3$.

• $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ → $\text{rg}(A) = 2$.

• Orlamos con la columna B: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 6 + 0 + 9 - 0 - 12 = -3 \neq 0$ →

$\text{rg}(A^*) = 3$.

$\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*)$ → **SI** (coincide con lo obtenido por Gauss).

PROCEDIMIENTO

Discusión de un sistema con un parámetro

Cuando un coeficiente depende de un parámetro a, se discute el sistema para cada valor:

1. Calcula $|A|$ en función de a e iguala a 0.

2. Para los valores que **no** anulan $|A|$: SCD.

3. Sustituye cada valor que lo anula en el sistema y estudia $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$ por separado.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

- $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$, que se anula en $a = 1$ y $a = -2$.
- $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ **SCD**.
- $a = 1$: las tres ecuaciones son $x + y + z = 1$, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 3 \rightarrow$ **SCI** con 2 parámetros.
- $a = -2$: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$. Orlando con B: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ **SI**.

Regla de Cramer

TEOREMA

Regla de Cramer

Un sistema es **de Cramer** si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y $|A| \neq 0$ (es decir, es SCD). Entonces cada incógnita es un cociente de determinantes: en el numerador, $|A|$ con la **columna de esa incógnita sustituida por la columna** B; en el denominador, siempre $|A|$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo con 2 incógnitas

EJEMPLO:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

- $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$ → es de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4+6}{5} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{9-4}{5} = 1$$

Solución: $x = 2,\ y = 1$.

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplo con 3 incógnitas

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 4 + 1 - 2 + 2 = 7 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{7}{7} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{14}{7} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

Solución: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$, la misma que por Gauss.

PROCEDIMIENTO

Cramer en un sistema compatible indeterminado

Si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r < n$, también se puede usar Cramer:

1. Elige un menor de orden r no nulo; quédate con las r ecuaciones de sus filas (las demás sobran).

2. Las incógnitas que no están en sus columnas pasan al segundo miembro como parámetros.

3. Aplica Cramer al sistema $r \times r$ resultante.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2z = 5 \end{cases}$$

$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2$ con el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Quitamos la 3.ª ecuación y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = 3 - \lambda \\ 2x - y = 2 - \lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5 + 2\lambda}{-3} = \frac{5 - 2\lambda}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{\lambda - 4}{-3} = \frac{4 - \lambda}{3}$$

Solución: $\left(\frac{5-2\lambda}{3}, \frac{4-\lambda}{3}, \lambda\right)$, igual que por Gauss.

RESUMEN

1. Matrices

Matriz y dimensión

$m \times n$: m filas y n columnas; a_{ij} está en la fila i, columna j. Traspuesta: filas por columnas.

$$(A^t)_{ij} = a_{ji} \qquad A \text{ simétrica} \iff A^t = A$$

Suma y producto por un escalar

Solo se suman matrices de la misma dimensión, elemento a elemento.

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \qquad (k \cdot A)_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Producto de matrices

Columnas de A = filas de B. Fila por columna. **No es conmutativo**: $AB \neq BA$ en general.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Propiedades

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \qquad A \cdot I = I \cdot A = A \qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Rango (Gauss)

Número de filas no nulas tras escalonar con operaciones elementales.

$$\operatorname{rg}(A) \leq \min(m, n)$$

Matriz inversa

Solo para cuadradas de rango máximo. Por Gauss-Jordan:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \qquad (A \mid I) \longrightarrow (I \mid A^{-1})$$

Ecuaciones matriciales

Se despeja multiplicando por la inversa por el lado correcto.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

2. Determinantes

Orden 2 y Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad |A|_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Adjunto y desarrollo por una fila

α_{ij}: menor al quitar la fila i y la columna j. Conviene desarrollar por la fila o columna con más ceros.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij} \qquad |A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Propiedades

Intercambiar dos filas cambia el signo. Filas iguales, proporcionales o combinación lineal → 0. Sumar a una fila un múltiplo de otra no lo cambia (sirve para hacer ceros).

$$|kA| = k^n|A| \qquad |A^t| = |A| \qquad |AB| = |A||B| \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Rango por menores

Se orlan menores no nulos hasta que todos los de orden siguiente sean 0.

$$\mathrm{rg}(A) = k \iff \text{hay un menor de orden } k \neq 0 \text{ y todos los de orden } k+1 \text{ son } 0$$

Matriz inversa

A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{Adj}(A))^t$$

3. Sistemas de ecuaciones

Expresión matricial

A matriz de coeficientes, A^* ampliada con los términos independientes. Si A tiene inversa:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Clasificación

SCD: solución única. **SCI**: infinitas. **SI**: ninguna. Un sistema homogéneo ($AX = O$) siempre es compatible.

Gauss

Se escalona la matriz ampliada. Fila $0 = k$ $(k \neq 0)$ → SI; tantas ecuaciones como incógnitas → SCD; menos ecuaciones → SCI.

Rouché-Frobenius

n = número de incógnitas.

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = n \Rightarrow \text{SCD} \qquad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) < n \Rightarrow \text{SCI} \qquad \operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A^*) \Rightarrow \text{SI}$$

Discusión con un parámetro

Se iguala $|A| = 0$: para los demás valores, SCD; cada raíz se estudia con rangos.

Cramer

Para $|A| \neq 0$: cada incógnita es el determinante con su columna sustituida por los términos independientes, entre $|A|$.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

A

Adjunto: A_{ij} DEFINICIÓN 25

D

Desarrollo por una fila o columna (Laplace) TEOREMA 26
Determinante de orden 2 DEFINICIÓN 24
Determinante de una matriz cuadrada DEFINICIÓN 23
Diagonal principal DEFINICIÓN 5
Dimensión de una matriz DEFINICIÓN 4

E

Elementos de una matriz: a_{ij} DEFINICIÓN 4

F

Fórmula de la inversa TEOREMA 34

I

Igualdad de matrices DEFINICIÓN 5

M

Matrices asociadas a un sistema DEFINICIÓN 38
Matrices cuadradas especiales DEFINICIÓN 6
Matriz DEFINICIÓN 3
Matriz adjunta: $\mathrm{Adj}(A)$ DEFINICIÓN 33
Matriz identidad: I DEFINICIÓN 8
¿Qué es la matriz inversa? DEFINICIÓN 16
Matriz regular y matriz singular TEOREMA 33
Matriz traspuesta: A^t DEFINICIÓN 7
Menor complementario: α_{ij} DEFINICIÓN 25
Menor de orden k DEFINICIÓN 31

O

Operaciones elementales por filas DEFINICIÓN 14

P

Potencia de una matriz DEFINICIÓN 13
Producto de matrices: cálculo de cada elemento DEFINICIÓN 11
Producto de matrices: cuándo se pueden multiplicar DEFINICIÓN 11
Producto de un escalar por una matriz DEFINICIÓN 10

R

¿Qué es el rango? DEFINICIÓN 13
Rango por menores TEOREMA 31
Regla de Cramer TEOREMA 46

S

Según el número de soluciones DEFINICIÓN 40
Sistema de ecuaciones lineales DEFINICIÓN 36
Sistemas equivalentes DEFINICIÓN 37
Sistemas homogéneos DEFINICIÓN 41
Solución de un sistema DEFINICIÓN 37
Suma y resta: condición DEFINICIÓN 8
Suma y resta de matrices DEFINICIÓN 9

T

Teorema de Rouché-Frobenius TEOREMA 44
Tipos de matrices según su forma DEFINICIÓN 5