ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

# POTENCIAS, RAÍCES Y LOGARITMOS

Cuenca · 2026

# ÍNDICE

**1. Propiedades de las potencias** 3

Potencias básicas 3
Signos en las potencias 4
Operaciones con potencias 5
Exponentes especiales 8

**2. Propiedades de las raíces** 10

Fundamentos 10
Propiedades de las raíces 11
Operaciones con radicales 12
Racionalización de raíces 14
Potencias y raíces 16

**3. Propiedades de los logaritmos** 17

Definición 17
Propiedades operativas 19
Propiedades avanzadas 21

**4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas** 22

Ecuaciones exponenciales 22
Ecuaciones logarítmicas 25
Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas 27

**Resumen** 32

**Índice de conceptos** 35

TEMA 1

# PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Propiedades de las potencias explicadas con ejemplos: exponente cero, uno y negativo, signo de las potencias, operaciones con potencias y exponentes fraccionarios.

## Potencias básicas

**DEFINICIÓN**

### Potencia de exponente natural

La **potencia** $a^n$, con $a$ un número cualquiera (la **base**) y $n$ un número natural distinto de $0$ (el **exponente**), es el producto de $n$ factores iguales a $a$. No es lo mismo que multiplicar la base por el exponente: $2^5 = 32$, no $10$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

**EJEMPLO:**

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

**DEFINICIÓN**

### Potencia de exponente uno

Un producto de un solo factor es ese mismo factor, por lo que una potencia de exponente $1$ es la propia base.

$$a^1 = a$$

**EJEMPLO:**

$$6^1 = 6$$

# Signos en las potencias

**PROPIEDAD**

## Exponente par

Si el exponente es **par**, los factores negativos se agrupan por parejas y cada pareja da un producto positivo: la potencia es siempre **positiva**.

$$(-a)^n = a^n \quad (n \text{ par})$$

**EJEMPLO:**

$$2^6 = 64$$
$$(-2)^6 = 64$$

**PROPIEDAD**

## Exponente impar

Si el exponente es **impar**, queda un factor negativo sin pareja: la potencia tiene el **mismo signo** que la **base**.

$$(-a)^n = -a^n \quad (n \text{ impar})$$

**EJEMPLO:**

$$2^3 = 8$$
$$(-2)^3 = -8$$

PROPIEDAD

### Cuidado con el paréntesis

Sin paréntesis, el exponente solo afecta al número, no al signo: $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$.

$$(-a)^n \neq -a^n$$

**EJEMPLO:**

$$(-2)^4 = 16 \qquad -2^4 = -16$$

## Operaciones con potencias

PROPIEDAD

### Multiplicación con la misma base

Con la **misma base**, al multiplicar se mantiene la base y se **suman** los exponentes. Se justifica contando factores: $a^m$ tiene $m$ factores, $a^n$ tiene $n$, y el producto tiene $m+n$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

**EJEMPLO:**

$7^5 \cdot 7^2 = 7^{5+2} = 7^7$
Comprobación: $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5$

PROPIEDAD

## División con la misma base

Con la **misma base** (distinta de $0$), al dividir se mantiene la base y se **restan** los exponentes. Se justifica simplificando factores: de $a^m$ se cancelan los $n$ factores de $a^n$ y quedan $m-n$ (si $m>n$).

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

**EJEMPLO:**

$7^5 : 7^2 = 7^{5-2} = 7^3$
Comprobación: $2^5 : 2^2 = 32 : 4 = 8 = 2^3$

PROPIEDAD

## Potencia de una potencia

Se mantiene la base y se **multiplican** los exponentes: $(a^m)^n$ son $n$ grupos de $m$ factores, es decir, $m \cdot n$ factores.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

**EJEMPLO:**

$$(7^5)^3 = 7^{5\times 3} = 7^{15}$$

PROPIEDAD

## Multiplicación con el mismo exponente

Con el **mismo exponente**, se multiplican las bases y se mantiene el exponente (por las propiedades conmutativa y asociativa del producto).

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

**EJEMPLO:**

$$2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$$

PROPIEDAD

## División con el mismo exponente

Con el **mismo exponente**, se dividen las bases y se mantiene el exponente.

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

**EJEMPLO:**

$$6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3 = 2^3$$

OBSERVACIÓN

## Potencia de una suma

Error muy frecuente: las potencias se pueden repartir en productos y cocientes, pero **no** en sumas ni restas. Para desarrollar $(a+b)^2$ se usan las identidades notables.

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

**EJEMPLO:**

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25 \qquad 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

# Exponentes especiales

**DEFINICIÓN**

## Potencia de exponente cero

Se **define** $a^0 = 1$ para $a \neq 0$, de modo que siga cumpliéndose la regla de la división de potencias de la misma base: $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$ y un número (distinto de $0$) dividido entre sí mismo es $1$. La expresión $0^0$ no se define.

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

**EJEMPLO:**

$$6^0 = 1 \qquad (-3)^0 = 1 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

**DEFINICIÓN**

## Exponente entero negativo

Para $a \neq 0$ se **define** $a^{-n}$ como el inverso de $a^n$, de modo que se mantenga la regla de la división: $a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$. Un exponente negativo **no** hace negativo el resultado: indica que hay que tomar el inverso de la base.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

**EJEMPLO:**

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

**DEFINICIÓN**

## Exponente racional

Para $a \geq 0$ (o cualquier $a$ si $n$ es impar) se **define** $a^{m/n}$ como la raíz $n$-ésima de $a^m$, de modo que se mantenga la regla de la potencia de una potencia: $\left(a^{1/n}\right)^n = a$. El denominador del exponente es el **índice** de la raíz y el numerador es el exponente del radicando (la raíz se define en el tema siguiente).

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**EJEMPLO:**

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

**DEFINICIÓN**

## Exponente racional y negativo

Se combinan las dos definiciones anteriores: primero se invierte la base (o se pone el resultado en el denominador) y después se calcula la raíz.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

**EJEMPLO:**

$$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{8}$$

TEMA 2

# PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Propiedades de las raíces con ejemplos: raíz de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz, extracción e introducción de factores, suma de radicales y racionalización.

## Fundamentos

**DEFINICIÓN**

### Raíz $n$-ésima

La **raíz** $n$-ésima de $a$ es el número $b$ que elevado a $n$ da $a$. El número natural $n \geq 2$ es el **índice** y $a$ el **radicando**; cuando el índice es 2 no se escribe. Si el índice es par, el radicando no puede ser negativo (no hay números reales cuyo cuadrado sea negativo) y la raíz se toma positiva: $\sqrt{-4}$ no existe en los reales y $\sqrt{25} = 5$ (no $-5$). Si el índice es impar, sí existe: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{25} = 5 \iff 5^2 = 25 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2 \iff (-2)^3 = -8$$

# Propiedades de las raíces

**PROPIEDAD**

## Raíz de un producto

La raíz de un producto es el producto de las raíces. Con índice par, $a$ y $b$ deben ser positivos o cero. Se justifica porque $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = a\cdot b$.

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$$

**PROPIEDAD**

## Raíz de un cociente

La raíz de un cociente es el cociente de las raíces $(b\neq 0)$.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$$

**PROPIEDAD**

## Raíz de una potencia

Da igual hacer primero la potencia y luego la raíz, o al revés. Elegir el orden adecuado simplifica las cuentas.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

PROPIEDAD

### Raíz de una raíz

Una raíz dentro de otra se convierte en una sola raíz cuyo índice es el **producto** de los índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

OBSERVACIÓN

### Raíz de una suma

Error muy frecuente: la raíz se reparte en productos y cocientes, pero **no** en sumas ni restas.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

## Operaciones con radicales

PROPIEDAD

### Extraer factores de una raíz

Se descompone el radicando en factores primos. Cada grupo de $n$ factores iguales sale fuera de la raíz como un solo factor; lo que no completa un grupo se queda dentro.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b}$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

PROPIEDAD

## Introducir factores en una raíz

Es la operación contraria: el factor de fuera entra elevado al índice de la raíz.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

**EJEMPLO:**

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

DEFINICIÓN

## Radicales semejantes

Dos radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando; solo pueden diferir en el coeficiente que los multiplica.

$$a\sqrt[n]{c} \quad \text{y} \quad b\sqrt[n]{c} \text{ son semejantes}$$

**EJEMPLO:**

$3\sqrt{5}$ y $-2\sqrt{5}$ son semejantes. $\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$ no lo son (distinto radicando) ni $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{5}$ (distinto índice).

PROCEDIMIENTO

## Suma y resta de radicales

Solo se pueden sumar radicales **semejantes**: se suman los coeficientes y se mantiene el radical (propiedad distributiva). Antes de sumar conviene extraer factores para que aparezcan radicales semejantes.

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

PROPIEDAD

### Producto de radicales de distinto índice

Se reducen a **índice común** (el m.c.m. de los índices) y después se multiplican los radicandos. También se puede pasar a exponentes fraccionarios: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[k]{a^{k/n} \cdot b^{k/m}} \qquad k = \text{m.c.m.}(n, m)$$

**EJEMPLO:**

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5}$$

## Racionalización de raíces

DEFINICIÓN

### Racionalizar

**Racionalizar** una fracción es hallar otra equivalente que no tenga raíces en el denominador. Se consigue multiplicando numerador y denominador por una expresión adecuada, de modo que el valor de la fracción no cambia.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \qquad (k \neq 0)$$

**EJEMPLO:**

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

PROCEDIMIENTO

## Raíz en el denominador

Se multiplica por $\sqrt[n]{b^{n-k}}$ para que la suma de exponentes dentro de la raíz dé $n$ $(k+(n-k)=n)$, y el denominador se reduzca a $b$. Si $k=1$ y $n=2$, basta con multiplicar por la propia raíz.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^{n-k}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-k}}}{b}$$

**EJEMPLO:**

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

DEFINICIÓN

## Conjugado de un binomio

El **conjugado** de un binomio $c+\sqrt{d}$ es $c-\sqrt{d}$ (se cambia el signo central). Su producto es una diferencia de cuadrados en la que la raíz desaparece.

$$(c+\sqrt{d})(c-\sqrt{d}) = c^2 - d$$

**EJEMPLO:**

$$(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 9-5 = 4$$

PROCEDIMIENTO

## Binomio con raíz en el denominador

Se multiplica numerador y denominador por el **conjugado** del denominador. Al aplicar la *suma por diferencia* se obtiene una diferencia de cuadrados, que elimina la raíz.

$$\frac{a}{c+\sqrt{d}} = \frac{a}{c+\sqrt{d}} \cdot \frac{c-\sqrt{d}}{c-\sqrt{d}} = \frac{a(c-\sqrt{d})}{c^2-d}$$

**EJEMPLO:**

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

# Potencias y raíces

**PROPIEDAD**

## Exponente fraccionario y raíces

Cualquier raíz puede expresarse como una potencia de **exponente racional** y viceversa (para $a \geq 0$). Así las propiedades de las raíces se deducen de las de las potencias.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**EJEMPLO:**

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$
$$\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \quad \text{y} \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^{1/2} \cdot 5^{1/3} = 5^{5/6}$$

TEMA 3

# PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Aprende la definición de logaritmo, los logaritmos decimal y neperiano y sus propiedades fundamentales: logaritmo de un producto, cociente, potencia y cambio de base.

## Definición

**DEFINICIÓN**

### Logaritmo

El **logaritmo** en base $a$ de $b$ es el **exponente** $c$ al que hay que elevar la base $a$ para obtener el argumento $b$. La base debe ser positiva y distinta de $1$, y solo existen logaritmos de números **positivos**: $\log_2(-8)$ y $\log_2 0$ no existen, porque ninguna potencia de $2$ da un número negativo ni cero.

$$\log_a b = c \iff a^c = b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

**EJEMPLO:**

$$\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8 \qquad \log_3 \frac{1}{9} = -2 \iff 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

**PROPIEDAD**

### Logaritmo de la base

Porque $a^1 = a$, el exponente al que hay que elevar $a$ para obtener $a$ es $1$.

$$\log_a a = 1$$

**EJEMPLO:**

$$\log_5 5 = 1$$

PROPIEDAD

## Logaritmo de uno

Porque $a^0 = 1$, el exponente al que hay que elevar $a$ para obtener $1$ es $0$.

$$\log_a 1 = 0$$

**EJEMPLO:**

$$\log_7 1 = 0$$

DEFINICIÓN

## Logaritmo decimal y neperiano

Cuando no se escribe la base, el logaritmo es **decimal** (base 10). El logaritmo **neperiano** $\ln$ tiene base $e \approx 2{,}718$. Son los dos que trae la calculadora, por eso se usan para resolver ecuaciones.

$$\log x = \log_{10} x \qquad \ln x = \log_e x$$

**EJEMPLO:**

- $\log 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$
- $\ln e^2 = 2$
- $\log_3 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}771$ (cambio de base para usar la calculadora)

# Propiedades operativas

**PROPIEDAD**

## Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto de números positivos es la **suma** de los logaritmos. *Demostración:* si $M = a^x$ y $N = a^y$, entonces $\log_a M = x$, $\log_a N = y$ y $M \cdot N = a^{x+y}$, luego $\log_a(M \cdot N) = x + y$.

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

**EJEMPLO:**

$$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

---

**PROPIEDAD**

## Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente de números positivos es la **resta** de los logaritmos. *Demostración:* con $M = a^x$ y $N = a^y$, $\dfrac{M}{N} = a^{x-y}$.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

**EJEMPLO:**

$$\log_2 \frac{16}{4} = \log_2 16 - \log_2 4 = 4 - 2 = 2$$

---

PROPIEDAD

## Logaritmo de una potencia

El exponente del argumento **baja multiplicando**. *Demostración:* si $M = a^x$, entonces $M^n = a^{nx}$ y $\log_a(M^n) = nx$. Es la propiedad clave para despejar incógnitas que están en un exponente.

$$\log_a(M^n) = n \cdot \log_a M$$

**EJEMPLO:**

$$\log_3(9^4) = 4 \cdot \log_3 9 = 4 \cdot 2 = 8$$

OBSERVACIÓN

## Errores frecuentes

No hay ninguna propiedad para el logaritmo de una suma o de una resta, ni para el cociente de dos logaritmos. Los logaritmos convierten productos en sumas, no sumas en productos.

$$\log_a(M+N) \neq \log_a M + \log_a N \qquad \frac{\log_a M}{\log_a N} \neq \log_a \frac{M}{N}$$

**EJEMPLO:**

$$\log(10+10) = \log 20 \approx 1{,}30 \qquad \log 10 + \log 10 = 2$$

# Propiedades avanzadas

**PROPIEDAD**

## Logaritmo de una raíz

Es un caso particular del logaritmo de una potencia, porque $\sqrt[n]{M} = M^{\frac{1}{n}}$.

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

**EJEMPLO:**

$$\log_2 \sqrt[3]{8} = \frac{1}{3} \log_2 8 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

**PROPIEDAD**

## Cambio de base

Permite calcular cualquier logaritmo con la calculadora, que solo trae log (base 10) y ln (base $e$). *Demostración:* si $\log_a M = x$, entonces $a^x = M$; tomando $\log_b$ queda $x \cdot \log_b a = \log_b M$.

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

**EJEMPLO:**

$$\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2} = 2$$

TEMA 4

# ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas (igualando bases, tomando logaritmos o con cambio de variable) y sus sistemas, comprobando las soluciones.

## Ecuaciones exponenciales

**DEFINICIÓN**

### Ecuación exponencial

Una **ecuación exponencial** es una ecuación en la que la incógnita aparece en un **exponente**, como $2^{x+1} = 32$. Una potencia de base positiva $a$ cumple $a^x > 0$ para cualquier $x$: nunca vale $0$ ni un número negativo. La idea de todos los métodos es la misma: llegar a una forma en la que se pueda «bajar» el exponente, igualando bases o tomando logaritmos.

**EJEMPLO:**

- $3^x = -9$ no tiene solución, porque $3^x$ siempre es positivo.
- $2^{x+1} = 32$ sí la tiene: $x = 4$, porque $2^5 = 32$.

PROCEDIMIENTO

## Igualar las bases

Si los dos miembros se pueden escribir como potencias de la **misma base**, los exponentes tienen que ser iguales. Descompón los números en factores primos para encontrar esa base común.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$$

**EJEMPLO:**

- $2^{x+1} = 32 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^5 \Rightarrow x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4$
- $9^x = 27^{x-1} \Rightarrow (3^2)^x = (3^3)^{x-1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{3x-3}$
  $2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3$ (comprobación: $9^3 = 729 = 27^2$)

PROCEDIMIENTO

## Tomar logaritmos

Cuando las bases **no se pueden igualar**, se aísla la potencia en un miembro, se toman logaritmos en los dos miembros y la propiedad de la potencia baja el exponente: $\ln a^x = x \ln a$. Es válido porque $b > 0$ y el logaritmo es una función inyectiva.

$$a^x = b \iff x = \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

**EJEMPLO:**

- $3^x = 7 \Rightarrow x \ln 3 = \ln 7 \Rightarrow x = \dfrac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}771$
- $5^{x-2} = 12 \Rightarrow (x-2)\ln 5 = \ln 12 \Rightarrow x = 2 + \dfrac{\ln 12}{\ln 5} \approx 3{,}544$
- $e^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \ln 5 \Rightarrow x = \dfrac{\ln 5}{2} \approx 0{,}805$

PROCEDIMIENTO

## Sacar factor común

Si aparecen **sumas** de potencias de la misma base con exponentes distintos, no se pueden tomar logaritmos directamente $(\log(A+B) \neq \log A + \log B)$. Separa cada potencia y saca $a^x$ factor común.

$$a^{x+n} = a^n \cdot a^x$$

**EJEMPLO:**

$$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$$
$$2 \cdot 2^x + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28 \Rightarrow 2^x \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 28$$
$$2^x \cdot \frac{7}{2} = 28 \Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

PROCEDIMIENTO

## Cambio de variable

Si aparecen $a^{2x}$ y $a^x$, llama $t = a^x$; entonces $a^{2x} = (a^x)^2 = t^2$ y queda una ecuación de segundo grado. Al deshacer el cambio, **descarta los valores de $t$ negativos o nulos**, porque $a^x$ siempre es positivo.

$$t = a^x \quad (t > 0)$$

**EJEMPLO:**

- $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow t = 2,\ t = 4$
  $2^x = 2 \Rightarrow x = 1; \quad 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$
- $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3,\ t = -1$
  $3^x = 3 \Rightarrow x = 1; \quad 3^x = -1$ no tiene solución

# Ecuaciones logarítmicas

**DEFINICIÓN**

## Ecuación logarítmica

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación en la que la incógnita aparece en el **argumento** de un logaritmo, como $\log_2(x-1)=3$. Como solo existen logaritmos de números positivos, cada solución obtenida debe **comprobarse** en la ecuación original.

$$\log_a f(x)=c \qquad \log_a f(x)=\log_a g(x)$$

**EJEMPLO:**

$\log(x+1)=2$ es logarítmica con solución $x=99$, porque $\log 100=2$.

---

**OBSERVACIÓN**

## Existencia de los logaritmos

Solo existen logaritmos de números **positivos**. Por eso, al terminar una ecuación logarítmica hay que **comprobar** cada solución en la ecuación original: si algún argumento queda negativo o cero, esa solución se descarta. Es el error más habitual.

$$\log_a M \text{ existe} \iff M>0$$

**EJEMPLO:**

- $\log(x-5)$ solo tiene sentido si $x>5$
- $\log(-3)$ y $\log 0$ no existen

---

PROCEDIMIENTO

## Aplicar la definición

Si hay un **único logaritmo igualado a un número**, se pasa a forma exponencial con la definición.

$$\log_a f(x) = c \iff f(x) = a^c$$

EJEMPLO:

- $\log_2(x-1) = 3 \Rightarrow x - 1 = 2^3 = 8 \Rightarrow x = 9$
- $\ln(2x) = 0 \Rightarrow 2x = e^0 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

PROCEDIMIENTO

## Agrupar e igualar argumentos

Usa las propiedades del producto, cociente y potencia para dejar **un solo logaritmo en cada miembro** (escribe también los números como logaritmos: $1 = \log 10$). Después iguala los argumentos y comprueba las soluciones.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x)$$

EJEMPLO:

- $\log x + \log(x+3) = 1 \Rightarrow \log[x(x+3)] = \log 10$
  $x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -5$
  $x = -5$ se descarta porque $\log(-5)$ no existe. Solución: $x = 2$
- $2\log x - \log(x-2) = \log 9 \Rightarrow \log \dfrac{x^2}{x-2} = \log 9$
  $x^2 = 9x - 18 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = 6$ (las dos cumplen $x > 2$)

PROCEDIMIENTO

### Cambio de variable

Si el logaritmo aparece **al cuadrado**, llama $t = \log_a x$, resuelve la ecuación de segundo grado y deshaz el cambio con la definición. Aquí $t$ sí puede ser negativo. Ojo: $(\log x)^2$ no es lo mismo que $\log x^2 = 2\log x$.

$$t = \log_a x$$

EJEMPLO:

$(\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1,\ t = 2$
$\log x = 1 \Rightarrow x = 10; \quad \log x = 2 \Rightarrow x = 100$

## Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

DEFINICIÓN

### Sistema de ecuaciones exponenciales o logarítmicas

Un **sistema de ecuaciones exponenciales** (o **logarítmicas**) es un sistema en el que las incógnitas aparecen en exponentes (o en argumentos de logaritmos) en al menos una de sus ecuaciones. Una **solución** es un par $(x, y)$ que cumple todas las ecuaciones a la vez. La idea es transformarlo, con los mismos métodos que las ecuaciones, en un **sistema algebraico** (lineal o de segundo grado) que ya sabemos resolver.

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 32 \\ 3^{x-y} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

EJEMPLO:

$(x, y) = (3, 2)$ es solución del primer sistema: $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$ y $3^{3-2} = 3$.

PROCEDIMIENTO

## Sistemas exponenciales: igualar bases

Si en cada ecuación se puede dejar una sola potencia en cada miembro con la **misma base**, se igualan los exponentes y queda un sistema de ecuaciones lineales. Pasos:

**1.** Con las propiedades de las potencias ($a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$), deja una sola potencia en cada miembro.
**2.** Escribe los números como potencias de esa misma base (descomponiendo en factores primos).
**3.** Iguala los exponentes de cada ecuación.
**4.** Resuelve el sistema lineal (reducción, sustitución o igualación).
**5.** Comprueba la solución en el sistema original.

$$a^{f(x,y)} = a^c \iff f(x,y) = c$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 32 \\ 3^{x-y} = 3 \end{cases}$$

**1.** En la primera ecuación, el producto de potencias de la misma base suma los exponentes: $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$.
**2.** Escribimos los números como potencias: $32 = 2^5$ y $3 = 3^1$.

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2^5 \\ 3^{x-y} = 3^1 \end{cases}$$

**3.** Igualamos los exponentes: $\begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = 1 \end{cases}$
**4.** Por reducción, sumamos las dos ecuaciones: $(x+y)+(x-y) = 5+1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Sustituimos en la primera: $3+y = 5 \Rightarrow y = 2$
**5.** Comprobación: $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$ ✓ y $3^{3-2} = 3^1 = 3$ ✓

PROCEDIMIENTO

## Sistemas exponenciales: cambio de variable

Si aparecen **sumas** de potencias, no se pueden igualar exponentes. Pasos:

**1.** Separa las potencias con exponentes compuestos: $a^{x+n} = a^n \cdot a^x$, $a^{x-n} = \dfrac{a^x}{a^n}$.

**2.** Haz el cambio $u = a^x$, $v = b^y$: queda un sistema lineal en $u$ y $v$.

**3.** Resuelve ese sistema. Como las potencias son siempre positivas, **se descartan los valores de $u$ o $v$ negativos o nulos**.

**4.** Deshaz el cambio: cada igualdad $a^x = u$ es una ecuación exponencial sencilla.

**5.** Comprueba la solución en el sistema original.

$$u = a^x, \quad v = b^y \qquad (u > 0,\ v > 0)$$

**EJEMPLO:**

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} - 3^y = 5 \end{cases}$$

**1.** Separamos $2^{x+1} = 2^1 \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x$: $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2 \cdot 2^x - 3^y = 5 \end{cases}$

**2.** Cambio $u = 2^x$, $v = 3^y$: $\begin{cases} u + v = 7 \\ 2u - v = 5 \end{cases}$

**3.** Por reducción, sumamos las dos ecuaciones: $(u + v) + (2u - v) = 7 + 5 \Rightarrow 3u = 12 \Rightarrow u = 4$

Sustituimos en la primera: $4 + v = 7 \Rightarrow v = 3$. Los dos valores son positivos, así que valen.

**4.** Deshacemos el cambio:

$2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$3^y = 3 = 3^1 \Rightarrow y = 1$

**5.** Comprobación: $2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7$ ✓ y $2^3 - 3^1 = 8 - 3 = 5$ ✓

PROCEDIMIENTO

## Sistemas logarítmicos

Hay dos caminos:

• **Cambio de variable**, si cada logaritmo aparece solo: se llama $u = \log x$, $v = \log y$, se resuelve el sistema lineal en $u$ y $v$ y se deshace el cambio con la definición ($\log x = u \iff x = 10^u$).

• **Agrupar**: con las propiedades del producto y del cociente se deja un solo logaritmo en cada miembro, se escriben los números como logaritmos ($2 = \log 100$) y se igualan los argumentos; queda un sistema algebraico en $x$ e $y$, que se resuelve por sustitución.

En los dos casos hay que **comprobar** cada solución en el sistema original: se descarta si algún argumento queda negativo o cero.

$$\log x + \log y = \log(xy) \qquad \log x - \log y = \log \frac{x}{y}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

**1.** Cambio $u = \log x$, $v = \log y$: $\begin{cases} u + v = 3 \\ u - v = 1 \end{cases}$

**2.** Sumamos las dos ecuaciones: $2u = 4 \Rightarrow u = 2$. Sustituimos en la primera: $2 + v = 3 \Rightarrow v = 1$

**3.** Deshacemos el cambio con la definición:

$\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 \Rightarrow x = 100$

$\log y = 1 \Rightarrow y = 10^1 \Rightarrow y = 10$

**4.** Comprobación (los argumentos son positivos):

$\log 100 + \log 10 = 2 + 1 = 3$ ✓ y $\log 100 - \log 10 = 2 - 1 = 1$ ✓

EJEMPLO RESUELTO

## Sistema logarítmico agrupando logaritmos

**EJEMPLO:**

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

**1.** En la segunda ecuación, la suma de logaritmos es el logaritmo del producto y $2 = \log 10^2 = \log 100$:

$\log(xy) = \log 100 \Rightarrow xy = 100$

**2.** Queda el sistema algebraico $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{cases}$

**3.** Despejamos $x$ en la primera, $x = y + 15$, y sustituimos en la segunda:

$(y + 15)\, y = 100 \Rightarrow y^2 + 15y - 100 = 0$

**4.** Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$y = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2} = \frac{-15 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-15 \pm 25}{2} \Rightarrow y = 5,\ y = -20$$

**5.** Calculamos $x = y + 15$ para cada valor:

$y = 5 \Rightarrow x = 20$

$y = -20 \Rightarrow x = -5$

**6.** Comprobamos:

$(20, 5)$: $20 - 5 = 15$ ✓ y $\log 20 + \log 5 = \log 100 = 2$ ✓

$(-5, -20)$: se descarta, porque $\log(-5)$ y $\log(-20)$ no existen.

Solución: $x = 20$, $y = 5$

# RESUMEN

## 1. Propiedades de las potencias

### Definición

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} \qquad a^1 = a \qquad a^0 = 1\ (a \neq 0)$$

### Signo

Base negativa: exponente par → positivo; impar → negativo.

$$(-a)^n \neq -a^n$$

### Misma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

### Mismo exponente

No hay regla para la suma: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n$$

### Exponentes negativos y fraccionarios

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

## 2. Propiedades de las raíces

### Definición

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

### Propiedades

No hay regla para la suma: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

### Extraer e introducir factores

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$

### Suma y producto de radicales

Solo se suman radicales semejantes (mismo índice y radicando). Con distinto índice, se reduce a índice común $k = \text{m.c.m.}(n, m)$.

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$$

### Racionalizar

Raíz sola: multiplicar por la raíz que complete el exponente. Binomio: multiplicar por el conjugado.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b} \qquad \frac{a}{c+\sqrt{d}} = \frac{a(c-\sqrt{d})}{c^2-d}$$

## 3. Propiedades de los logaritmos

### Definición

Solo existe el logaritmo de números positivos.

$$\log_a b = c \iff a^c = b \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

### Valores básicos

$\log$ es en base 10 y $\ln$ en base $e$.

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

### Propiedades

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad \log_a M^n = n\log_a M \quad \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$$

### Errores frecuentes

$$\log_a(M+N) \neq \log_a M + \log_a N \qquad \frac{\log_a M}{\log_a N} \neq \log_a \frac{M}{N}$$

### Cambio de base

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

# 4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

### Exponenciales: igualar bases

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$$

### Exponenciales: tomar logaritmos

Cuando no se pueden igualar las bases.

$$a^x = b \iff x = \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

### Exponenciales: factor común y cambio de variable

Si aparecen $a^{x+n}$, se saca $a^x$ factor común. Si aparecen $a^{2x}$ y $a^x$, se hace $t = a^x$ (solo valen las soluciones $t > 0$).

$$a^{x+n} = a^n \cdot a^x \qquad t = a^x$$

### Logarítmicas

Se agrupan los logaritmos con las propiedades y se aplica la definición o se igualan argumentos.

$$\log_a f(x) = c \iff f(x) = a^c \qquad \log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x)$$

### Comprobar las soluciones

En las logarítmicas hay que sustituir: se descarta toda solución que haga algún argumento $\leq 0$.

### Sistemas

Se pasa a un sistema algebraico igualando exponentes, agrupando logaritmos o con un cambio de variable ($u = a^x$ con $u > 0$; $u = \log x$), y se comprueban las soluciones.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log x + \log y = \log(xy)$$

# ÍNDICE DE CONCEPTOS

## C

Conjugado de un binomio DEFINICIÓN ..... 15

## E

Ecuación exponencial DEFINICIÓN ..... 22
Ecuación logarítmica DEFINICIÓN ..... 25
Exponente entero negativo DEFINICIÓN ..... 8
Exponente racional DEFINICIÓN ..... 9
Exponente racional y negativo DEFINICIÓN ..... 9

## L

Logaritmo DEFINICIÓN ..... 17
Logaritmo decimal y neperiano DEFINICIÓN ..... 18

## P

Potencia de exponente cero DEFINICIÓN ..... 8
Potencia de exponente natural DEFINICIÓN ..... 3
Potencia de exponente uno DEFINICIÓN ..... 3

## R

Racionalizar DEFINICIÓN ..... 14
Radicales semejantes DEFINICIÓN ..... 13
Raíz $n$-ésima DEFINICIÓN ..... 10

## S

Sistema de ecuaciones exponenciales o logarítmicas DEFINICIÓN ..... 27