ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

RAZONES, PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Razones, proporcionalidad y porcentajes 3

Razón y proporción 3
Tipos de proporcionalidad 5
Regla de tres 6
Repartos proporcionales 7
Porcentajes 8

Resumen 11

Índice de conceptos 12

TEMA 1

RAZONES, PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

Conceptos fundamentales para comprender la relación entre magnitudes, resolver problemas con reglas de tres y dominar el cálculo porcentual.

Razón y proporción

DEFINICIÓN

Razón

La **razón** entre dos cantidades a y b (con $b \neq 0$), expresadas en la misma unidad, es el cociente $\frac{a}{b}$. A a se le llama **antecedente** y a b **consecuente**. La razón no tiene unidades y compara las dos cantidades.

$$\frac{a}{b}$$

EJEMPLO:

La razón entre 10 y 5 es $\frac{10}{5} = 2$: la primera cantidad es el doble de la segunda.
La razón entre 3 m y 60 cm es $\frac{300}{60} = 5$ (se pasan primero a la misma unidad).

DEFINICIÓN

Proporción

Una **proporción** es la igualdad de dos razones. Se lee «a es a b como c es a d». Los términos a y d se llaman **extremos** y b y c **medios**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

EJEMPLO:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$: es una proporción porque ambas razones valen $\frac{2}{3}$.

PROPIEDAD

Propiedad fundamental

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Es la condición de equivalencia de fracciones: se obtiene multiplicando ambos miembros de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por $b \cdot d$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO:

En $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ se cumple $2 \cdot 6 = 12$ y $3 \cdot 4 = 12$.

PROCEDIMIENTO

Cálculo del término desconocido

Si falta uno de los cuatro términos, se aplica la propiedad fundamental y se despeja. Para el término x que ocupa el lugar de d: $a \cdot x = b \cdot c$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \implies x = \frac{b \cdot c}{a}$$

EJEMPLO:

Hallar x en $\frac{2}{5} = \frac{4}{x}$: $2 \cdot x = 5 \cdot 4 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$.

Tipos de proporcionalidad

DEFINICIÓN

Directamente proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número. Equivale a que el cociente entre sus valores correspondientes sea constante; ese cociente k es la **constante de proporcionalidad**.

$$\frac{y}{x} = k$$

EJEMPLO:

Si 1 kg de manzanas cuesta 2 €, 2 kg cuestan 4 €, 3 kg cuestan 6 €…
Los cocientes $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$ coinciden: $k = 2$ €/kg.

DEFINICIÓN

Inversamente proporcionales

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una por un número, la otra queda dividida por ese mismo número. Equivale a que el producto de sus valores correspondientes sea constante, k.

$$x \cdot y = k$$

EJEMPLO:

Si 2 obreros tardan 6 h en hacer un trabajo, 4 obreros tardan 3 h y 1 obrero tardaría 12 h.
Los productos $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 1 \cdot 12 = 12$ coinciden: $k = 12$.

Regla de tres

PROCEDIMIENTO

Regla de tres directa

Se usa con dos magnitudes **directamente** proporcionales cuando se conocen tres valores y se busca el cuarto. Como $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, se multiplica en cruz.

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

EJEMPLO:

$$\begin{matrix} A & B \\ a & b \\ c & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Si 5 kg de naranjas cuestan 8 €, ¿cuánto cuestan 7 kg?

$$\begin{matrix} \text{kg} & \text{€} \\ 5 & 8 \\ 7 & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 7}{5} = 11{,}2 \text{ €}$$

PROCEDIMIENTO

Regla de tres inversa

Se usa con dos magnitudes **inversamente** proporcionales cuando se conocen tres valores y se busca el cuarto. Como $a \cdot b = c \cdot x$, se multiplica en línea.

$$x = \frac{a \cdot b}{c}$$

EJEMPLO:

$$\begin{matrix} A & B \\ a & b \\ c & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$$

6 obreros tardan 10 días en una obra. ¿Cuánto tardarán 15 obreros?

$$\begin{matrix} \text{obreros} & \text{días} \\ 6 & 10 \\ 15 & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 10}{15} = 4 \text{ días}$$

Repartos proporcionales

PROCEDIMIENTO

Reparto directamente proporcional

Repartir una cantidad C de forma directamente proporcional a unos números $a, b, c, \ldots$ es dividirla en partes $x, y, z, \ldots$ tales que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots$ Sumando las partes se obtiene C, y de ahí que cada una sea C por su proporción del total, donde $S = a + b + c + \ldots$

$$x = \frac{C \cdot a}{S}, y = \frac{C \cdot b}{S}, z = \frac{C \cdot c}{S}$$

EJEMPLO:

Repartir 300 € entre dos personas de forma proporcional a 2 y 4: $S = 6$
$x = \frac{300 \cdot 2}{6} = 100$ € e $y = \frac{300 \cdot 4}{6} = 200$ €. Comprobación: $100 + 200 = 300$ ✓

PROCEDIMIENTO

Reparto inversamente proporcional

Repartir C de forma inversamente proporcional a $a, b, c, \ldots$ es hacer el reparto directamente proporcional a sus **inversos** $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots$ Se llama $S' = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots$ (se reducen a común denominador).

$$x = \frac{C \cdot \frac{1}{a}}{S'}, \quad y = \frac{C \cdot \frac{1}{b}}{S'}, \quad z = \frac{C \cdot \frac{1}{c}}{S'}$$

EJEMPLO:

Repartir 300 € de forma inversamente proporcional a 2 y 4: los inversos son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ y $S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$x = \frac{300 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = 200$ € e $y = \frac{300 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 100$ €. Quien tiene el número menor recibe más. ✓

Porcentajes

DEFINICIÓN

Porcentaje

Un **porcentaje** (o tanto por ciento) $a\%$ es la razón $\frac{a}{100}$: indica cuántas unidades se toman de cada 100. Para trabajar con él se escribe como fracción o como número decimal (**tanto por uno**).

$$a\% = \frac{a}{100}$$

EJEMPLO:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15 \qquad 100\% = 1 \qquad 50\% = \frac{1}{2}$$

PROCEDIMIENTO

Porcentaje de una cantidad

Para hallar el $a\%$ de una cantidad C se multiplica C por el tanto por uno $\frac{a}{100}$.

$$a\% \text{ de } C = C \cdot \frac{a}{100}$$

EJEMPLO:

$$20\% \text{ de } 50 = 50 \cdot 0{,}20 = 10$$

PROCEDIMIENTO

Qué porcentaje es una cantidad de otra

Para saber qué porcentaje representa una parte P de un total T se calcula la razón $\frac{P}{T}$ y se multiplica por 100. Es el problema inverso al de calcular el porcentaje de una cantidad.

$$\text{porcentaje} = \frac{P}{T} \cdot 100\,\%$$

EJEMPLO:

En una clase de 25 alumnos, 10 son chicas. El porcentaje de chicas es $\frac{10}{25} \cdot 100 = 40\%$.

DEFINICIÓN

Índice de variación

El **índice de variación** es el número por el que hay que multiplicar una cantidad para obtener su valor final tras una variación porcentual. Para un aumento del $r\%$ vale $1 + \frac{r}{100}$; para una disminución del $r\%$, $1 - \frac{r}{100}$.

$$IV_{\text{aumento}} = 1 + \frac{r}{100} \qquad IV_{\text{disminución}} = 1 - \frac{r}{100}$$

EJEMPLO:

Aumento del 25%: $IV = 1 + 0{,}25 = 1{,}25$.
Disminución del 30%: $IV = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$.

PROCEDIMIENTO

Aumentos porcentuales

Para aumentar una cantidad un $r\%$ se multiplica por el índice de variación $1 + \frac{r}{100}$.

$$C_{final} = C_{inicial} \cdot (1 + \tfrac{r}{100})$$

EJEMPLO:

Aumentar 40 € un 10%: $40 \cdot 1{,}10 = 44$ €

PROCEDIMIENTO

Disminuciones porcentuales

Para disminuir una cantidad un $r\%$ se multiplica por el índice de variación $1 - \frac{r}{100}$.

$$C_{final} = C_{inicial} \cdot (1 - \tfrac{r}{100})$$

EJEMPLO:

Rebajar 40 € un 10%: $40 \cdot 0{,}90 = 36$ €

PROPIEDAD

Variaciones porcentuales sucesivas

Cuando una cantidad sufre varias variaciones porcentuales seguidas, los índices de variación se **multiplican**: no se pueden sumar los porcentajes, porque cada uno se aplica sobre una cantidad distinta.

$$C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot IV_1 \cdot IV_2 \cdots IV_n$$

EJEMPLO:

Un artículo de 100 € sube un 20% y después baja un 20%: $100 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}80 = 96$ €. No vuelve a valer 100 €, porque la bajada se aplica sobre 120 €.

RESUMEN

1. Razones, proporcionalidad y porcentajes

Proporción

Igualdad de dos razones; el producto de extremos es igual al de medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Proporcionalidad directa e inversa

Directa: si una se duplica, la otra también. Inversa: si una se duplica, la otra se reduce a la mitad.

$$\text{directa: } \frac{y}{x} = k \qquad \text{inversa: } x \cdot y = k$$

Regla de tres

$a \to b,\ c \to x$.

$$\text{directa: } x = \frac{b \cdot c}{a} \qquad \text{inversa: } x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Repartos proporcionales

Directo: se reparte C en proporción a a, b, c $(S = a + b + c)$. Inverso: en proporción a $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

$$x = \frac{C \cdot a}{S}$$

Porcentajes

$$a\% \text{ de } C = C \cdot \frac{a}{100} \qquad \text{porcentaje} = \frac{P}{T} \cdot 100$$

Aumentos y disminuciones

Se multiplica por el índice de variación; las variaciones sucesivas se encadenan multiplicando.

$$C_f = C_i \left(1 \pm \frac{r}{100}\right) \qquad C_f = C_i \cdot IV_1 \cdot IV_2 \cdots IV_n$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

D

Directamente proporcionales DEFINICIÓN 5

I

Índice de variación DEFINICIÓN 9
Inversamente proporcionales DEFINICIÓN 5

P

Porcentaje DEFINICIÓN 8
Proporción DEFINICIÓN 4

R

Razón DEFINICIÓN 3