ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Puntos, rectas y planos 3

¿Qué es un punto? 3
¿Qué es una recta? 4
¿Qué es un plano? 5

2. Ecuaciones de la recta 6

Ecuación vectorial y paramétricas 6
Ecuación continua 8
Ecuaciones implícitas 9
Cómo pasar de unas a otras 10

3. Ecuaciones del plano 11

Ecuación vectorial 11
Ecuaciones paramétricas 12
Ecuación general 13
Vector normal 15
De la ecuación general a las paramétricas 17

4. Posiciones relativas 18

Posiciones relativas de dos rectas 18
Posiciones relativas de recta y plano 21
Posiciones relativas de dos planos 23
Posiciones relativas de tres planos 24

Resumen 28

Índice de conceptos 32

TEMA 1

PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

Punto, recta y plano en el espacio: sistema de referencia, vector director, vectores directores, recta por dos puntos y plano por tres puntos.

¿Qué es un punto?

DEFINICIÓN

Punto del espacio

Fijamos un **sistema de referencia** $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: un punto O (el **origen**) y la base canónica de V_3. Cada **punto** P del espacio queda determinado por su **vector de posición** $\overrightarrow{OP}$, y las **coordenadas** de P son las de ese vector.
Un punto es una **posición** y un vector es un **desplazamiento**: los dos se escriben con tres números, pero no son lo mismo. Restando dos puntos (extremo menos origen) se obtiene un vector.

$$P(x, y, z) \iff \overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x, y, z)$$

EJEMPLO:

$P(2, -1, 3)$ es el punto al que se llega desde O avanzando 2 en el eje X, -1 en el Y y 3 en el Z.
Con $Q(5, 1, 3)$: $\overrightarrow{PQ} = (5-2,\ 1-(-1),\ 3-3) = (3, 2, 0)$.

¿Qué es una recta?

DEFINICIÓN

Recta: punto y vector director

Una **recta** r queda determinada por un **punto** A de ella y un **vector director** $\vec{v} \neq \vec{0}$, que marca su dirección. Está formada por los puntos X a los que se llega desde A desplazándose un múltiplo de $\vec{v}$.
Ni el punto ni el vector son únicos: sirve **cualquier punto** de la recta y **cualquier vector paralelo** a $\vec{v}$ (no nulo).

$$r = \{X \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \vec{v} \neq \vec{0}$$

EJEMPLO:

La recta que pasa por $A(1,-2,3)$ con dirección $\vec{v} = (2,1,-1)$:
- $\lambda = 0$: $A(1,-2,3)$.
- $\lambda = 1$: $(1+2,\ -2+1,\ 3-1) = (3,-1,2)$.
- $\lambda = -1$: $(-1,-3,4)$.

$(4,2,-2)$ o $(-2,-1,1)$ también son vectores directores de r.

PROPIEDAD

Recta que pasa por dos puntos

Por dos puntos distintos A y B pasa **una única recta**: la de punto A (o B) y vector director $\overrightarrow{AB}$.

$$A \neq B \Rightarrow r = \{X \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

EJEMPLO:

$A(1,0,2)$ y $B(3,-1,4)$: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,2)$. La recta pasa por A ($\lambda = 0$) y por B ($\lambda = 1$).

¿Qué es un plano?

DEFINICIÓN

Plano: punto y dos vectores directores

Un **plano** π queda determinado por un **punto** A y dos **vectores directores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **no paralelos** (linealmente independientes). Está formado por los puntos X a los que se llega desde A con una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ fueran paralelos, solo darían una dirección y se obtendría una recta, no un plano.

$$\pi = \{X \mid \overrightarrow{AX} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \qquad \vec{u} \nparallel \vec{v}$$

EJEMPLO:

$A(1,0,2)$, $\vec{u} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (0,1,3)$: no son proporcionales ($v_1 = 0$ pero $u_1 = 1 \neq 0$), luego determinan un plano.
Con $\lambda = 1$, $\mu = 1$: $(1+1+0,\ 0+2+1,\ 2-1+3) = (2,3,4) \in \pi$.

PROPIEDAD

Puntos alineados y plano por tres puntos

Tres puntos A, B, C están **alineados** si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos (proporcionales). Si **no están alineados**, determinan **un único plano**: el de punto A y vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
Por tres puntos alineados pasan infinitos planos (todos los que contienen su recta).

EJEMPLO:

$A(1,0,2)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,-2,6)$, $D(0,1,1)$:
- $\overrightarrow{AB} = (2,-1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (4,-2,4) = 2\,\overrightarrow{AB}$ → A, B, C **alineados**.
- $\overrightarrow{AD} = (-1,1,-1)$ no es proporcional a $\overrightarrow{AB}$ ($\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{-1}$) → A, B, D **determinan un plano**.

TEMA 2

ECUACIONES DE LA RECTA

Ecuaciones de la recta en el espacio: vectorial, paramétricas, continua e implícitas, y cómo pasar de unas a otras.

Ecuación vectorial y paramétricas

DEFINICIÓN

Ecuación vectorial

Es la definición de recta escrita con vectores de posición: el punto genérico $X(x,y,z)$ se obtiene sumando al punto A un múltiplo del vector director $\vec{v}$. Cada valor del **parámetro** λ da un punto de la recta.

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda\,(v_1,v_2,v_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

Recta por $A(1,-2,3)$ con $\vec{v} = (2,1,-1)$:

$$r : (x,y,z) = (1,-2,3) + \lambda\,(2,1,-1)$$

Recta por $A(1,0,2)$ y $B(3,-1,4)$: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,2)$ y

$$(x,y,z) = (1,0,2) + \lambda\,(2,-1,2)$$

DEFINICIÓN

Ecuaciones paramétricas

Se obtienen igualando coordenada a coordenada en la ecuación vectorial. Son las más cómodas para **dar puntos** (se elige λ) y para comprobar si un punto **pertenece** a la recta: debe salir el **mismo** λ en las tres ecuaciones.

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

- ¿$P(5,0,1) \in r$? $5 = 1 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 2$; $0 = -2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 2$; $1 = 3 - \lambda \Rightarrow \lambda = 2$. Mismo λ → **sí**.
- ¿$Q(3,0,2) \in r$? $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$. Distintos → **no**.

Ecuación continua

DEFINICIÓN

Ecuación continua

Si todas las coordenadas del vector director son **no nulas**, se despeja λ en cada ecuación paramétrica y se igualan los resultados. Desaparece el parámetro.
De ella se leen directamente un punto (los números que se **restan** a x, y, z) y el vector director (los **denominadores**).

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3} \qquad v_1,v_2,v_3\neq 0$$

EJEMPLO:

De $x=1+2\lambda$, $y=-2+\lambda$, $z=3-\lambda$: $\lambda=\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$, es decir,

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

Cuidado con los signos: $y+2=y-(-2)$, así que el punto es $A(1,-2,3)$.

OBSERVACIÓN

Vector director con una coordenada nula

Si una coordenada de $\vec{v}$ es 0, no se puede dividir entre ella. Esa coordenada del punto **no cambia** al mover λ, y se escribe aparte como una igualdad.
Algunos libros escriben $\frac{y-4}{0}$ como notación, entendiendo que significa $y-4=0$; no es una división.

$$v_2=0:\quad \frac{x-a_1}{v_1}=\frac{z-a_3}{v_3},\quad y=a_2$$

EJEMPLO:

$A(1,4,0)$, $\vec{v}=(2,0,-3)$: paramétricas $x=1+2\lambda$, $y=4$, $z=-3\lambda$. Continua:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z}{-3},\quad y=4$$

Ecuaciones implícitas

DEFINICIÓN

Ecuaciones implícitas (cartesianas)

Una recta también se puede dar como la **intersección de dos planos** no paralelos: los puntos que cumplen a la vez dos ecuaciones lineales. Para que sea una recta, la matriz de coeficientes debe tener **rango 2** (si no, los planos serían paralelos o el mismo).
Una misma recta tiene infinitas parejas de ecuaciones implícitas (pasan por ella infinitos planos).

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$$

EJEMPLO:

$$r: \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ → rango 2: es una recta.

Cómo pasar de unas a otras

PROCEDIMIENTO

De continua a implícitas

Se toman dos de las igualdades de la ecuación continua (la 1.ª con la 2.ª y la 2.ª con la 3.ª, por ejemplo) y se **multiplica en cruz**. Cada igualdad es la ecuación de un plano que contiene a la recta.
Si partes de la vectorial o las paramétricas, pasa antes a continua.

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}\Rightarrow v_2(x-a_1)=v_1(y-a_2)$$

EJEMPLO:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$:

- $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}\Rightarrow x-1=2y+4\Rightarrow x-2y-5=0$
- $\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow -y-2=z-3\Rightarrow y+z-1=0$

Comprobación con $A(1,-2,3)$: $1+4-5=0$ ✓ y $-2+3-1=0$ ✓.

PROCEDIMIENTO

De implícitas a paramétricas

Las implícitas son un sistema compatible indeterminado con un parámetro: se **resuelve** tomando una incógnita como parámetro ($y=\lambda$, por ejemplo) y despejando las otras dos en función de λ. El término independiente da un punto y los coeficientes de λ, el vector director.
Elige como parámetro una incógnita que permita despejar las otras dos (si una incógnita no aparece en ninguna ecuación, debe ser ella).

EJEMPLO:

$\begin{cases}x-2y-5=0\\y+z-1=0\end{cases}$ con $y=\lambda$: $x=5+2\lambda$, $z=1-\lambda$.

$$r:\begin{cases}x=5+2\lambda\\y=\lambda\\z=1-\lambda\end{cases}\Rightarrow\quad A'(5,0,1),\ \vec{v}=(2,1,-1)$$

Es la misma recta de antes con otro punto: $(5,0,1)=(1,-2,3)+2\,(2,1,-1)$ ✓.

TEMA 3

ECUACIONES DEL PLANO

Ecuaciones del plano en el espacio: vectorial, paramétricas y general, cómo pasar de unas a otras con determinantes y el vector normal.

Ecuación vectorial

DEFINICIÓN

Ecuación vectorial

Es la definición de plano escrita con vectores de posición: el punto genérico $X(x,y,z)$ se obtiene sumando al punto A una **combinación lineal** de los dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Tiene **dos parámetros**, λ y μ (uno por cada vector director), y se escribe como **una sola igualdad entre vectores**.

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda\,(u_1,u_2,u_3) + \mu\,(v_1,v_2,v_3), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

$A(1,0,2)$, $\vec{u} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (0,1,3)$:

$$\pi : (x,y,z) = (1,0,2) + \lambda\,(1,2,-1) + \mu\,(0,1,3)$$

Con $\lambda = 1$, $\mu = 1$: $(1,0,2) + (1,2,-1) + (0,1,3) = (2,3,4) \in \pi$.

Ecuaciones paramétricas

DEFINICIÓN

Ecuaciones paramétricas

Se obtienen de la ecuación vectorial **igualando coordenada a coordenada**: son **tres ecuaciones**, una para x, otra para y y otra para z, con los mismos dos parámetros λ y μ.
Para comprobar si un punto **pertenece** al plano, se sustituye y se buscan λ y μ con dos de las ecuaciones; el punto es del plano si esos valores cumplen también la tercera.

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

Del plano anterior:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda + 3\mu \end{cases}$$

¿$P(2,3,4) \in \pi$? De x: $\lambda = 1$; de y: $3 = 2 + \mu \Rightarrow \mu = 1$; en z: $2 - 1 + 3 = 4$ ✓ → **sí**.
¿$Q(2,3,0) \in \pi$? Mismos $\lambda = 1$, $\mu = 1$, pero $z = 4 \neq 0$ → **no**.

Ecuación general

DEFINICIÓN

Ecuación general (implícita)

Es una única ecuación lineal en x, y, z, sin parámetros. Los puntos del plano son exactamente los que la cumplen.
Es la más útil para comprobar si un punto **pertenece** al plano (se sustituye) y para estudiar posiciones relativas.

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

EJEMPLO:

$\pi : 7x - 3y + z - 9 = 0$.
- $(1, 0, 2)$: $7 - 0 + 2 - 9 = 0$ → pertenece.
- $(1, 1, 1)$: $7 - 3 + 1 - 9 = -4 \neq 0$ → no pertenece.

PROCEDIMIENTO

De vectorial o paramétricas a general: con un determinante

Un punto $X(x, y, z)$ está en el plano si y solo si $\overrightarrow{AX}$ es **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, si los tres vectores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ son **linealmente dependientes** (coplanarios). Tres vectores de V_3 son dependientes si y solo si su **determinante es cero**.
Se escribe ese determinante, se desarrolla por la primera fila y se simplifica.

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO:

$A(1, 0, 2)$, $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (x - 1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (z - 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7(x - 1) - 3y + (z - 2) = 0 \Rightarrow \pi : 7x - 3y + z - 9 = 0$$

PROCEDIMIENTO

Plano que pasa por tres puntos

Si A, B, C no están alineados, se toma el punto A y los vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y se aplica el determinante anterior.
Si sale el determinante idénticamente nulo $(0=0)$, es que los puntos estaban alineados.

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO:

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$: $\overrightarrow{PQ}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{PR}=(-1,0,3)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1)-y\,(-3)+z\,(2)=0 \Rightarrow 6x+3y+2z-6=0$$

Comprobación: Q: $6-6=0$ ✓; R: $6-6=0$ ✓.

Vector normal

DEFINICIÓN

Vector normal del plano

Un **vector normal** de un plano es un vector no nulo **perpendicular** a él (a todos sus vectores directores). En la ecuación general, los coeficientes de x, y, z forman un vector normal.
Por qué: si P y Q son del plano, restando sus ecuaciones queda $A(p_1 - q_1) + B(p_2 - q_2) + C(p_3 - q_3) = 0$, es decir, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$.
Un punto y un vector normal también determinan el plano: se escribe $Ax + By + Cz + D = 0$ con $\vec{n}$ y se halla D sustituyendo el punto.

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n} = (A, B, C) \perp \pi$$

EJEMPLO:

• $\pi : 7x - 3y + z - 9 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (7, -3, 1)$. Comprobación con $\vec{u} = (1, 2, -1)$: $7 - 6 - 1 = 0$ ✓.
• Plano por $P(1, 1, 0)$ con $\vec{n} = (2, -1, 3)$: $2x - y + 3z + D = 0$; con P: $2 - 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1$.

$$\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$$

PROPIEDAD

El vector normal es $\vec{u} \times \vec{v}$

Al desarrollar el determinante por la primera fila, los coeficientes de x, y, z son los adjuntos de esa fila, que son justo las coordenadas del **producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$. Es lógico: $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a los dos vectores directores.
Así se obtiene la ecuación general en dos pasos: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ y luego D con el punto.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1,\ (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 3,\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (7, -3, 1)$$

Los mismos coeficientes que en $7x - 3y + z - 9 = 0$ ✓.

PROPIEDAD

Vector director de una recta dada en implícitas

Si r es la intersección de dos planos con normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, su dirección es perpendicular a ambas normales, así que un vector director es su producto vectorial. Para un punto, se da un valor a una incógnita y se resuelve el sistema 2×2 que queda.

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

EJEMPLO:

$r: \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$: $\vec{n}_1 = (1, -2, 0)$, $\vec{n}_2 = (0, 1, 1)$.

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-2 \cdot 1 - 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0) = (-2, -1, 1)$$

Es paralelo a $(2, 1, -1)$, el vector que obtuvimos resolviendo el sistema ✓.
Con $y = 0$: $x = 5$, $z = 1$ → punto $(5, 0, 1)$.

De la ecuación general a las paramétricas

PROCEDIMIENTO

De general a paramétricas

La ecuación general es un sistema de una ecuación con tres incógnitas: compatible indeterminado con **dos parámetros**. Se despeja una incógnita (cuyo coeficiente no sea 0) y las otras dos pasan a ser λ y μ.

EJEMPLO:

$\pi: 2x - y + 3z - 4 = 0 \Rightarrow y = 2x + 3z - 4$. Con $x = \lambda$, $z = \mu$:

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 2\lambda + 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow A(0, -4, 0),\ \vec{u} = (1, 2, 0),\ \vec{v} = (0, 3, 1)$$

Comprobación: $\vec{n} = (2, -1, 3)$ y $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 2 + 0 = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 - 3 + 3 = 0$ ✓.

TEMA 4

POSICIONES RELATIVAS

Posiciones relativas en el espacio de dos rectas, recta y plano, dos planos y tres planos, estudiadas con rangos y determinantes.

Posiciones relativas de dos rectas

DEFINICIÓN

Posiciones de dos rectas en el espacio

Dos rectas del espacio pueden estar:
• **Coincidentes**: son la misma recta (infinitos puntos comunes).
• **Paralelas**: misma dirección y ningún punto común.
• **Secantes**: se cortan en un único punto.
• **Se cruzan**: ni se cortan ni son paralelas. Esto **no ocurre en el plano**: son rectas que no están en un mismo plano.
Las tres primeras son **coplanarias** (hay un plano que contiene a las dos).

EJEMPLO:

> En un cubo, la arista de abajo delante y la de arriba a la derecha **se cruzan**: no se tocan y no son paralelas. Dos aristas opuestas de una misma cara son **paralelas**; dos aristas que comparten vértice son **secantes**.

TEOREMA

Estudio con los vectores y un determinante

Sean r (punto A, vector $\vec{u}$) y s (punto B, vector $\vec{v}$). Se forman la matriz M con los dos vectores directores y la matriz M' añadiendo $\overrightarrow{AB}$:

• $\text{rg}(M)$ dice si las direcciones son iguales (rango 1) o distintas (rango 2).

• $\det(M') = 0$ dice si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son coplanarios, es decir, si las rectas están en un mismo plano.

$$M = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(M)$	$\text{rg}(M')$	Posición
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelas
2	2	Secantes
2	3	Se cruzan

EJEMPLO:

Atajo práctico: calcula primero $\det(M')$.

• $\det(M') \neq 0$ → **se cruzan**.

• $\det(M') = 0$ → coplanarias: si $\vec{u} \parallel \vec{v}$, paralelas o coincidentes (mira si $A \in s$); si no, secantes.

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplos: paralelas, coincidentes, secantes y se cruzan

EJEMPLO:

1. $r: (1,0,2) + \lambda(2,-1,1)$, $s: (0,1,1) + \mu(-4,2,-2)$.
$\vec{v} = -2\vec{u}$ → $\text{rg}(M) = 1$. $\overrightarrow{AB} = (-1,1,-1)$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ → $\text{rg}(M') = 2$: **paralelas**.

2. Si $s: (3,-1,3) + \mu(-4,2,-2)$: $\overrightarrow{AB} = (2,-1,1) = \vec{u}$ → $\text{rg}(M') = 1$: **coincidentes**.

3. $r: (1,0,2) + \lambda(1,1,-1)$, $s: (2,0,0) + \mu(0,1,1)$. $\overrightarrow{AB} = (1,0,-2)$:

$$\det(M') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 \cdot (0-1) + (-1)(0-1) = 0$$

y $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ → **secantes**. Igualando: $1+\lambda = 2$, $\lambda = \mu$, $2-\lambda = \mu$ → $\lambda = \mu = 1$, punto de corte $(2,1,1)$.

4. $r: (1,0,0) + \lambda(1,1,0)$, $s: (0,0,1) + \mu(1,0,1)$. $\overrightarrow{AB} = (-1,0,1)$:

$$\det(M') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (1+1) + 0 = -2 \neq 0$$

→ **se cruzan**.

PROCEDIMIENTO

Estudio con las ecuaciones implícitas

Si las dos rectas vienen en implícitas, sus cuatro ecuaciones forman un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Se comparan el rango de la matriz de coeficientes A (4×3) y el de la ampliada A^* (4×4), como en Rouché-Frobenius: si los rangos son iguales hay puntos comunes, y $\mathrm{rg}(A)$ indica si las direcciones coinciden.

Para ver si $\mathrm{rg}(A^*)=4$ basta con calcular $\det(A^*)$.

$\mathrm{rg}(A)$	$\mathrm{rg}(A^*)$	Posición
2	2	Coincidentes
2	3	Paralelas
3	3	Secantes
3	4	Se cruzan

EJEMPLO:

$$r:\begin{cases}x-y=0\\ z=1\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x+y=2\\ z=3\end{cases}$$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

En A, $\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0 \to \mathrm{rg}(A)=3$. $\det(A^*)=-4\neq 0 \to \mathrm{rg}(A^*)=4$: **se cruzan**.

Se ve también a ojo: r está en el plano $z=1$, s en $z=3$ (no se cortan), y sus direcciones $(1,1,0)$ y $(1,-1,0)$ no son paralelas.

Posiciones relativas de recta y plano

DEFINICIÓN

Posiciones de una recta y un plano

Una recta r y un plano π pueden estar:

- **Recta contenida en el plano**: todos los puntos de r son de π.
- **Paralelos**: no tienen ningún punto común.
- **Secantes**: se cortan en un único punto.

EJEMPLO:

En una habitación, la línea donde se juntan suelo y pared está **contenida** en el suelo; la línea donde se juntan techo y pared es **paralela** al suelo; la arista vertical de una esquina es **secante** al suelo.

TEOREMA

Estudio con rangos y determinantes

Con r en implícitas (dos ecuaciones) y π en general (una), queda un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Sus soluciones son los puntos comunes.

- $\det(A) \neq 0$: $\operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(A^*)$, sistema compatible determinado → **secantes** (el punto de corte es la solución, por Cramer o Gauss).
- $\det(A) = 0$: $\operatorname{rg}(A) = 2$ (las ecuaciones de r ya dan rango 2) y se mira A^*.

$\operatorname{rg}(A)$	$\operatorname{rg}(A^*)$	Posición
3	3	Secantes (un punto)
2	3	Paralelos
2	2	Recta contenida en el plano

EJEMPLO:

$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$, $\pi: x + y + z = 6$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 1) + 1 \cdot (0 - 1) + 0 = -1 \neq 0$$

→ **secantes**. Resolviendo: $(4, 3, -1)$. Comprobación: $4 - 3 = 1$ ✓, $3 - 1 = 2$ ✓, $4 + 3 - 1 = 6$ ✓.

PROCEDIMIENTO

Discusión con un parámetro

Cuando las ecuaciones tienen parámetros, se calcula $\det(A)$ en función de ellos y se iguala a 0: los valores que lo anulan son los casos especiales (paralelos o contenida); para el resto, la recta y el plano son secantes.

EJEMPLO:

$r: \begin{cases} x-y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$, $\pi: x+mz=k$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = m-1$$

- $m \neq 1$: **secantes**.
- $m=1$: $\pi: x+z=k$. Los coeficientes $(1,0,1)$ son la suma de las dos filas de r, que suman $1+2=3$ a la derecha, así que la última fila de A^* menos las otras dos es $(0,0,0 \mid k-3)$:
  - $k=3$: $\operatorname{rg}(A^*)=2$ → **recta contenida**.
  - $k \neq 3$: $\operatorname{rg}(A^*)=3$ → **paralelos**.

PROPIEDAD

Estudio con el vector director y el normal

Si la recta viene con punto A y vector $\vec{v}$, y el plano con su ecuación general (normal $\vec{n}$), hay un camino más corto:

- $\vec{v}\cdot\vec{n} \neq 0$ → **secantes** (la recta no es perpendicular a la normal, así que «atraviesa» el plano).
- $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$ → la recta es paralela a la dirección del plano: si $A \in \pi$, **contenida**; si $A \notin \pi$, **paralelos**.

Para el punto de corte, se sustituyen las paramétricas de r en la ecuación de π y se despeja λ.

EJEMPLO:

$r: (1,2,0)+\lambda(1,1,2)$:

- $\pi_1: x+y-z=3$. $\vec{v}\cdot\vec{n}=1+1-2=0$ y A: $1+2-0=3$ ✓ → **contenida**.
- $\pi_2: x+y-z=5$. Mismo producto 0, pero $1+2-0=3\neq 5$ → **paralelos**.
- $\pi_3: 2x-y+z=1$. $\vec{v}\cdot\vec{n}=2-1+2=3\neq 0$ → **secantes**: $2(1+\lambda)-(2+\lambda)+2\lambda=1 \Rightarrow 3\lambda=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$, punto $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Posiciones relativas de dos planos

DEFINICIÓN

Posiciones de dos planos

Dos planos pueden ser:

- **Coincidentes**: son el mismo plano.
- **Paralelos**: no tienen ningún punto común.
- **Secantes**: se cortan en una **recta** (en el espacio, dos planos nunca se cortan en un solo punto).

EJEMPLO:

El suelo y el techo de una habitación son **paralelos**; el suelo y una pared son **secantes** y se cortan en la línea del rodapié.

TEOREMA

Estudio con rangos

Las dos ecuaciones generales forman un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, con matriz de coeficientes A (2×3) y ampliada A^* (2×4).
$\operatorname{rg}(A)=1$ significa que las normales son proporcionales (planos paralelos o coincidentes); $\operatorname{rg}(A^*)$ decide si hay puntos comunes.
En la práctica equivale a comparar cocientes: $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$ coincidentes; los tres primeros iguales pero distinto del cuarto, paralelos; si los tres primeros no son iguales, secantes.

$\operatorname{rg}(A)$	$\operatorname{rg}(A^*)$	Posición
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelos
2	2	Secantes (una recta)

EJEMPLO:

$\pi_1: 2x-y+3z=1$.

- $\pi_2: 4x-2y+6z=2$: $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ → **coincidentes**.
- $\pi_2: 4x-2y+6z=5$: $\operatorname{rg}(A)=1$, pero $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=6\neq 0$ → $\operatorname{rg}(A^*)=2$: **paralelos**.
- $\pi_2: x+y-z=2$: $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$ → $\operatorname{rg}(A)=2$: **secantes**. La recta de corte tiene $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-2,5,3)$ y, con $z=0$, pasa por $(1,1,0)$.

Posiciones relativas de tres planos

DEFINICIÓN

Posiciones de tres planos

Tres planos π_1, π_2, π_3 pueden:
• Cortarse en **un único punto** (como dos paredes y el suelo en una esquina).
• Cortarse en **una recta** común (como las hojas de un libro abierto): se dice que forman un **haz**.
• Cortarse **dos a dos** en tres rectas paralelas, sin punto común a los tres (forman un **prisma** triangular abierto).
• Tener **dos planos paralelos** y el tercero cortándolos (en dos rectas paralelas).
• Ser los tres **paralelos**, o tener planos **coincidentes**.

EJEMPLO:

> Piensa en una caja: dos caras laterales y el fondo se cortan en un punto (una esquina); las dos tapas (arriba y abajo) son paralelas y cualquier cara lateral las corta.

TEOREMA

Estudio con rangos y determinantes

Las tres ecuaciones forman un sistema 3×3 con matriz A y ampliada A^*. Por Rouché-Frobenius, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$ si y solo si hay puntos comunes a los tres planos. Cuando hay dos casos posibles para los mismos rangos, se distinguen mirando si hay **filas proporcionales**: dos filas de A proporcionales son planos paralelos o coincidentes, y si también lo son en A^*, coincidentes.

$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	Posición
3	3	Se cortan en un punto
2	3	Sin filas proporcionales: prisma Dos paralelos y el tercero secante
2	2	Distintos: haz (una recta común) Dos coincidentes y el tercero secante
1	2	Tres paralelos Dos coincidentes y el tercero paralelo
1	1	Tres coincidentes

EJEMPLO:

Orden práctico:
1. Calcula $\det(A)$. Si es $\neq 0$, los planos se cortan en un punto (resuélvelo por Cramer).
2. Si es 0, halla $rg(A)$ y $rg(A^*)$ (orlando menores).
3. Mira si hay filas proporcionales para elegir el caso de la tabla.

EJEMPLO RESUELTO

Ejemplos de cada caso

EJEMPLO:

1. Un punto: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$ $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=6\neq 0$ → se cortan en $(1,2,3)$.

2. Prisma: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 2x+2z=5 \end{cases}$ La 3.ª fila de A es la suma de las dos primeras, pero $1+2=3\neq 5$: $\operatorname{rg}(A)=2$, $\operatorname{rg}(A^*)=3$, sin filas proporcionales → se cortan dos a dos.

3. Dos paralelos: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ $\operatorname{rg}(A)=2$, $\operatorname{rg}(A^*)=3$; las dos primeras filas de A son iguales y las de A^* no → $\pi_1 \parallel \pi_2$ y π_3 los corta.

4. Haz: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases}$ Ahora $1+2=3$: $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A^*)=2$ y no hay planos iguales → los tres pasan por la recta $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)+\lambda(-1,0,1)$.

5. Tres paralelos: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ $\operatorname{rg}(A)=1$, $\operatorname{rg}(A^*)=2$ y ninguna fila de A^* es proporcional a otra → tres planos paralelos distintos.

PROCEDIMIENTO

Discusión con un parámetro

Se calcula $\det(A)$ en función del parámetro y se buscan sus raíces. Para los demás valores los planos se cortan en un punto; cada raíz se estudia aparte sustituyéndola y calculando rangos.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a^3+3a-2=-(a-1)^2(a+2)$$

- $a\neq 1$ y $a\neq -2$: se cortan en **un punto**.
- $a=1$: las tres ecuaciones son $x+y+z=1$ → **tres planos coincidentes**.
- $a=-2$: las filas de A suman $(0,0,0)$, luego $\operatorname{rg}(A)=2$; los términos independientes suman $3\neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A^*)=3$. Ninguna fila es proporcional a otra → **prisma**.

RESUMEN

1. Puntos, rectas y planos

Punto

Sus coordenadas son las de su vector de posición. Un vector entre dos puntos es **extremo menos origen**.

$$P(x,y,z) \iff \overrightarrow{OP} = (x,y,z) \qquad \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$$

Recta

Se determina con un punto A y un vector director $\vec{v} \neq \vec{0}$, o con dos puntos distintos ($\vec{v} = \overrightarrow{AB}$).

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\,\vec{v}$$

Plano

Se determina con un punto A y dos vectores directores no paralelos, o con tres puntos no alineados ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} \qquad \vec{u} \nparallel \vec{v}$$

Puntos alineados

A, B, C están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

2. Ecuaciones de la recta

Vectorial

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda\,(v_1,v_2,v_3)$$

Paramétricas

Un punto es de la recta si da el **mismo** λ en las tres.

$$x = a_1 + \lambda v_1, \quad y = a_2 + \lambda v_2, \quad z = a_3 + \lambda v_3$$

Continua

Requiere $v_1, v_2, v_3 \neq 0$; si una coordenada de $\vec{v}$ es 0, esa coordenada se escribe aparte ($y = a_2$).

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Implícitas

Dos planos no paralelos: la matriz de coeficientes tiene rango 2.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Cómo pasar de unas a otras

- Vectorial → paramétricas: igualar coordenada a coordenada.
- Paramétricas → continua: despejar λ e igualar.
- Continua → implícitas: tomar dos igualdades y multiplicar en cruz.
- Implícitas → paramétricas: resolver el sistema con una incógnita como parámetro (o $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$).

3. Ecuaciones del plano

Vectorial

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3) + \mu\,(v_1, v_2, v_3)$$

Paramétricas

$$x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1, \quad y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2, \quad z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

General

Se obtiene con un determinante: $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser dependientes. Por tres puntos, se usan $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \iff \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Vector normal

Perpendicular al plano. Con un punto y $\vec{n}$, se halla D sustituyendo el punto.

$$\vec{n} = (A, B, C) = \vec{u} \times \vec{v}$$

General → paramétricas

Despejar una incógnita y tomar las otras dos como λ y μ.

Director de una recta en implícitas

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

4. Posiciones relativas

Dos rectas (vectores)

r: A, $\vec{u}$; s: B, $\vec{v}$. Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \neq 0$, se cruzan.

$\text{rg}(\vec{u}, \vec{v})$	$\text{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$	
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelas
2	2	Secantes
2	3	Se cruzan

Dos rectas (implícitas)

Sistema de 4 ecuaciones: A es 4×3, A^* es 4×4.

$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	
2	2	Coincidentes
2	3	Paralelas
3	3	Secantes
3	4	Se cruzan

Recta y plano

Sistema 3×3. Con vectores: $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ secantes; si $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, contenida si $A \in \pi$ y paralelos si no.

$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	
3	3	Secantes
2	3	Paralelos
2	2	Contenida

Dos planos

Equivale a comparar $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$.

$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelos
2	2	Secantes (recta)

Tres planos

Primero $\det(A)$: si es $\neq 0$, un punto. Si no, rangos y filas proporcionales.

$\mathrm{rg}(A)$	$\mathrm{rg}(A^*)$	
3	3	Un punto
2	3	Prisma, o dos paralelos y uno secante
2	2	Haz (recta), o dos coincidentes y uno secante
1	2	Paralelos, o dos coincidentes y uno paralelo
1	1	Coincidentes

ÍNDICE DE CONCEPTOS

E

Ecuación continua DEFINICIÓN 8
Ecuación general (implícita) DEFINICIÓN 13
Ecuación vectorial DEFINICIÓN 6
Ecuación vectorial DEFINICIÓN 11
Ecuaciones implícitas (cartesianas) DEFINICIÓN 9
Ecuaciones paramétricas DEFINICIÓN 7
Ecuaciones paramétricas DEFINICIÓN 12
Estudio con los vectores y un determinante TEOREMA 19
Estudio con rangos TEOREMA 23
Estudio con rangos y determinantes TEOREMA 21
Estudio con rangos y determinantes TEOREMA 25

P

Plano: punto y dos vectores directores DEFINICIÓN 5
Posiciones de dos planos DEFINICIÓN 23
Posiciones de dos rectas en el espacio DEFINICIÓN 18
Posiciones de tres planos DEFINICIÓN 24
Posiciones de una recta y un plano DEFINICIÓN 21
Punto del espacio DEFINICIÓN 3

R

Recta: punto y vector director DEFINICIÓN 4

V

Vector normal del plano DEFINICIÓN 15