ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

TRIGONOMETRÍA

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Trigonometría **3**

Medida de ángulos: grados y radianes 3
Razones trigonométricas 6
Relaciones entre las razones 7
Razones de 30°, 45° y 60° 9
La circunferencia goniométrica 11
Ángulo suma, resta, doble y mitad 13
Teoremas del seno y del coseno 15
Área de un triángulo 18
Ecuaciones trigonométricas 20

Resumen **22**

Índice de conceptos **24**

TEMA 1

TRIGONOMETRÍA

Grados y radianes, razones trigonométricas, circunferencia goniométrica, ángulo suma, doble y mitad, teoremas del seno y del coseno, área y ecuaciones trigonométricas.

Medida de ángulos: grados y radianes

DEFINICIÓN

Ángulo

Un **ángulo** es la porción de plano comprendida entre dos semirrectas con el mismo origen (el **vértice**). También se interpreta como la **cantidad de giro** necesaria para llevar una semirrecta sobre la otra. Se mide comparándolo con una unidad: el grado o el radián. Un ángulo de una vuelta completa mide 360° (2π rad), de media vuelta 180° y de un cuarto de vuelta 90° (ángulo recto).

$$1 \text{ vuelta} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

EJEMPLO:

Las agujas de un reloj a las 3 forman un ángulo recto, de 90°. A las 6, uno llano de 180°.

DEFINICIÓN

Grado sexagesimal

Si dividimos una circunferencia completa en 360 partes iguales, cada una es un **grado** (1°). Cada grado se divide en 60 **minutos** ($1^\circ = 60'$) y cada minuto en 60 **segundos** ($1' = 60''$). Por eso se llama sistema **sexagesimal**: va de 60 en 60, como las horas del reloj.

$$\text{vuelta completa} = 360^\circ \qquad 1^\circ = 60' \qquad 1' = 60''$$

EJEMPLO:

- Un ángulo recto mide 90° y un ángulo llano 180°.
- $35^\circ\,20'\,15''$ se lee «35 grados, 20 minutos y 15 segundos».
- $0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot 60' = 30'$

DEFINICIÓN

Radián

Un **radián** es el ángulo cuyo arco mide exactamente lo mismo que el **radio** de la circunferencia. Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, en una vuelta completa caben 2π radianes. Es la unidad del Sistema Internacional y la que se usa con funciones, límites y derivadas. Cuando un ángulo aparece sin unidad (por ejemplo $\frac{\pi}{3}$), se entiende que está en radianes.

$$\text{vuelta completa} = 2\pi \text{ rad} \qquad \text{ángulo (rad)} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{radio}}$$

EJEMPLO:

En una circunferencia de radio 3 cm, un arco de 6 cm abarca un ángulo de $\dfrac{6}{3} = 2$ rad.

PROCEDIMIENTO

Conversión entre grados y radianes

La equivalencia clave es **media vuelta**: $180^\circ = \pi$ rad. A partir de ella se pasa de una unidad a otra con una regla de tres. Un radián son unos 57°: no confundas π rad (180°) con 1 rad.

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \text{rad} = \text{grados} \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \text{grados} = \text{rad} \cdot \frac{180}{\pi}$$

EJEMPLO:

- $60^\circ = 60 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3}$ rad
- $\dfrac{3\pi}{4}$ rad $= \dfrac{3\pi}{4} \cdot \dfrac{180}{\pi} = 135^\circ$
- 1 rad $= \dfrac{180}{\pi} \approx 57{,}30^\circ \approx 57^\circ\, 17'\, 45''$

PROPIEDAD

Ángulos más usados

Conviene saberse de memoria estas equivalencias, porque aparecen constantemente.

Grados	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

EJEMPLO:

$120^\circ = 2 \cdot 60^\circ$, así que $120^\circ = 2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad.

Razones trigonométricas

DEFINICIÓN

Seno, coseno y tangente

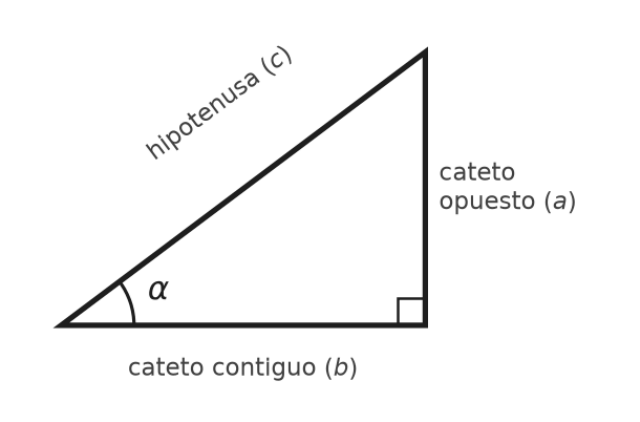
En un **triángulo rectángulo**, para un ángulo agudo α se definen tres cocientes entre sus lados. Solo dependen del ángulo, no del tamaño del triángulo: dos triángulos rectángulos con el mismo ángulo α son semejantes y sus lados son proporcionales.

Seno: cateto opuesto entre hipotenusa.

Coseno: cateto contiguo entre hipotenusa.

Tangente: cateto opuesto entre cateto contiguo.

Como los catetos son menores que la hipotenusa, el seno y el coseno de un ángulo agudo están siempre entre 0 y 1.



$$\operatorname{sin}\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

EJEMPLO:

Triángulo rectángulo de catetos $a = 3$ (opuesto a α) y $b = 4$, e hipotenusa $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$:

$$\operatorname{sin}\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

DEFINICIÓN

Cosecante, secante y cotangente

Son las **inversas** (en el sentido de $\frac{1}{x}$) del seno, del coseno y de la tangente. Ojo al emparejarlas: la **cosecante** es la inversa del **seno** y la **secante** la del **coseno** (cada una lleva el «co» que no tiene la otra). Tampoco las confundas con las funciones arco ($\arcsin$, $\arccos$...), que sirven para calcular el ángulo.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

EJEMPLO:

Con el triángulo anterior ($\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$):

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$$

Relaciones entre las razones

TEOREMA

Identidad fundamental: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Es la relación más importante de la trigonometría y sale directamente del **teorema de Pitágoras**. En el triángulo rectángulo se cumple $a^2 + b^2 = c^2$. Si dividimos los dos miembros entre c^2, aparecen el seno y el coseno:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Recuerda que $\sin^2\alpha$ significa $(\sin\alpha)^2$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

EJEMPLO:

Con $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos\alpha = \frac{4}{5}$: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$

PROPIEDAD

Tangente como cociente

Si dividimos el seno entre el coseno, la hipotenusa se simplifica y queda la tangente: $\dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{a}{b}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

EJEMPLO:

$$\sin\alpha = 0{,}6 \text{ y } \cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

TEOREMA

$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ y $1+\operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

Se obtienen dividiendo la identidad fundamental entre $\cos^2\alpha$ (la primera) o entre $\sin^2\alpha$ (la segunda):

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Son muy útiles cuando el dato que tenemos es la tangente.

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1+\operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

EJEMPLO:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$: $1 + \dfrac{9}{16} = \dfrac{25}{16} = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ ✓

PROCEDIMIENTO

Calcular todas las razones a partir de una

Conociendo una sola razón y el cuadrante del ángulo, se calculan todas las demás con estas relaciones:
1. Usa la identidad fundamental (o $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$ si te dan la tangente).
2. Al hacer la raíz cuadrada, elige el **signo** según el cuadrante (ver la circunferencia goniométrica).
3. Calcula la tangente como $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ y las inversas.

EJEMPLO:

- $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, α en el primer cuadrante:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{2}/3}{1/3}=2\sqrt{2}$$

- $\operatorname{tg}\alpha=2$, α en el primer cuadrante:

$$1+4=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\qquad \sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Razones de 30°, 45° y 60°

PROPIEDAD

Ángulo de 45°

Partimos de un **cuadrado de lado 1** y trazamos su diagonal. Obtenemos un triángulo rectángulo isósceles: los dos catetos miden 1, los dos ángulos agudos 45° y la hipotenusa, por Pitágoras, $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \operatorname{tg}45^\circ=\frac{1}{1}=1$$

EJEMPLO:

Como los dos catetos son iguales, el seno y el coseno de 45° coinciden y la tangente vale 1.

PROPIEDAD

Ángulos de 30° y 60°

Partimos de un **triángulo equilátero de lado 2** (sus ángulos miden $60°$) y trazamos una altura. Queda un triángulo rectángulo con hipotenusa 2, un cateto de 1 (la mitad de la base) y ángulos de $30°$ y $60°$. La altura, por Pitágoras, mide $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. El cateto de 1 es el opuesto al ángulo de $30°$ y el de $\sqrt{3}$ el opuesto al de $60°$.

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60° = \frac{1}{2} \quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

EJEMPLO:

$30°$ y $60°$ son **complementarios** (suman $90°$): el seno de uno es el coseno del otro. En general, $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

PROPIEDAD

Tabla de razones de los ángulos notables

Truco para recordar el seno: en orden, $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$. El coseno es la misma fila al revés, y la tangente se obtiene dividiendo seno entre coseno. La tangente de $90°$ no existe porque $\cos 90° = 0$.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

EJEMPLO:

Un árbol proyecta una sombra de 10 m cuando los rayos del sol forman $30°$ con el suelo. Su altura h es el cateto opuesto y la sombra el contiguo:

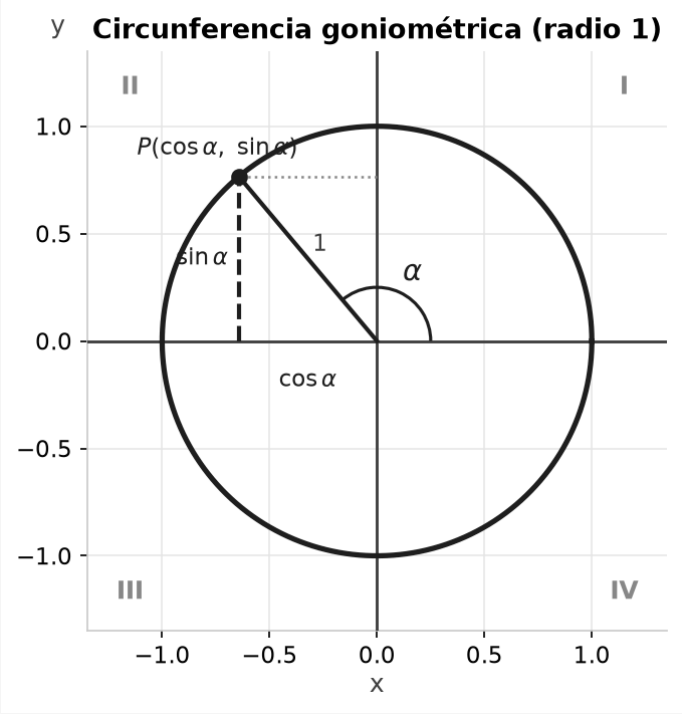
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}77 \text{ m}$$

La circunferencia goniométrica

DEFINICIÓN

Circunferencia goniométrica

Es una circunferencia de **centro el origen y radio 1**. Los ángulos se miden desde el semieje X positivo: en **sentido antihorario son positivos** y en sentido horario, negativos.
Si el lado del ángulo α corta a la circunferencia en el punto $P(x, y)$, se forma un triángulo rectángulo de hipotenusa 1. Por tanto $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$ y $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$: **el coseno es la proyección sobre el eje X y el seno la proyección sobre el eje Y**. Esto permite definir las razones de cualquier ángulo, no solo de los agudos, y con signo. La tangente solo está definida si $x = \cos\alpha \neq 0$, es decir, para $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$.



$$P = (\cos\alpha,\ \sin\alpha) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

EJEMPLO:

Como P está sobre una circunferencia de radio 1, sus coordenadas están entre -1 y 1:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

En cambio, la tangente puede tomar cualquier valor real.

PROCEDIMIENTO

Ángulos de 0°, 90°, 180° y 270°

Sus puntos en la circunferencia están sobre los ejes, así que sus razones se leen directamente de las coordenadas.

α	0°	90°	180°	270°
P	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

EJEMPLO:

$\cos 180^\circ = -1$ porque el punto $(-1,0)$ tiene abscisa -1.

PROPIEDAD

Signo de las razones en cada cuadrante

El signo depende del cuadrante en el que cae el ángulo: el seno es positivo arriba ($y>0$), el coseno a la derecha ($x>0$) y la tangente cuando ambos tienen el mismo signo.

	I (0°–90°)	II (90°–180°)	III (180°–270°)	IV (270°–360°)
sin	$+$	$+$	$-$	$-$
cos	$+$	$-$	$-$	$+$
tg	$+$	$-$	$+$	$-$

EJEMPLO:

200° está en el tercer cuadrante: $\sin 200^\circ < 0$, $\cos 200^\circ < 0$ y $\operatorname{tg} 200^\circ > 0$.

Ángulo suma, resta, doble y mitad

PROPIEDAD

Seno y coseno de la suma y la resta

Permiten calcular razones de ángulos que no son notables, escribiéndolos como suma o resta de ángulos conocidos. **Error típico**: $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$. Por ejemplo, $\sin(30^\circ+60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$, pero $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ \approx 1{,}37$. Fíjate también en que en el coseno el signo central es el **contrario** al del ángulo.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

EJEMPLO:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}966$$
$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ-30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

PROPIEDAD

Tangente de la suma y la resta

Se obtiene dividiendo el seno de la suma entre el coseno de la suma. De nuevo, el signo del denominador es el contrario.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

EJEMPLO:

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

(se ha racionalizado multiplicando por el conjugado $3+\sqrt{3}$).

PROPIEDAD

Ángulo doble

Son las fórmulas de la suma con $\beta = \alpha$. Por ejemplo, $\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. El coseno del ángulo doble también se puede escribir como $1-2\sin^2\alpha$ o $2\cos^2\alpha - 1$, usando la identidad fundamental.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

EJEMPLO:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, α en el primer cuadrante, así que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25} \qquad \cos 2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

PROPIEDAD

Ángulo mitad

Se deducen de $\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ y $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$, despejando. El **signo** de la raíz no lo da la fórmula: depende del cuadrante en el que esté $\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

EJEMPLO:

15° es la mitad de 30° y está en el primer cuadrante (signo $+$):

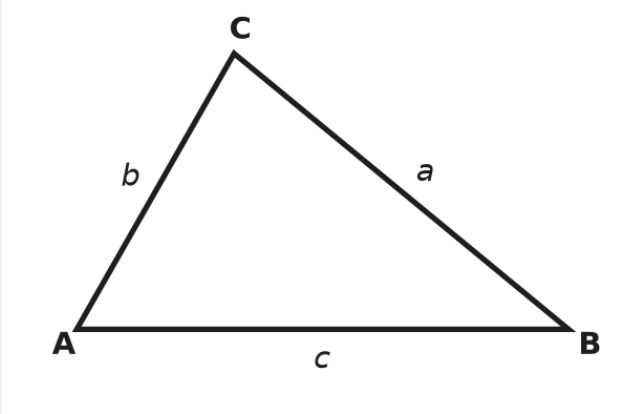
$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \approx 0{,}259$$

Teoremas del seno y del coseno

DEFINICIÓN

Notación en un triángulo cualquiera

Para triángulos que **no son rectángulos** se usan estos dos teoremas. Los vértices (y sus ángulos) se nombran con mayúsculas A, B, C, y cada lado con la minúscula del vértice **opuesto**: el lado a está enfrente del ángulo A. Recuerda que los tres ángulos suman 180°.



$$A + B + C = 180^\circ$$

EJEMPLO:

Resolver un triángulo es calcular sus tres lados y sus tres ángulos a partir de tres datos (al menos uno de ellos, un lado).

TEOREMA

Teorema del seno

En cualquier triángulo, los lados son **proporcionales a los senos de los ángulos opuestos**. Se usa cuando conocemos **dos ángulos y un lado**, o **dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**.
Cuidado en este último caso: si al despejar obtienes $\sin B$, hay dos ángulos posibles, B y $180^\circ - B$. Comprueba si los dos dan un triángulo válido (los ángulos deben sumar menos de 180°).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

EJEMPLO:

$A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ y $a = 10$:

- $C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$
- $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} = \dfrac{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25$
- $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} = \dfrac{10 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 13{,}66$

PROPIEDAD

Teorema del seno y circunferencia circunscrita

El cociente común del teorema del seno tiene un significado geométrico: es el **diámetro de la circunferencia circunscrita** al triángulo, la que pasa por sus tres vértices. Si R es su radio, cada lado es el diámetro por el seno del ángulo opuesto. Así, con un lado y su ángulo opuesto se obtiene R, y con R se obtiene cualquier lado conociendo su ángulo opuesto.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
$$a = 2R\sin A \qquad b = 2R\sin B \qquad c = 2R\sin C$$

EJEMPLO:

- $a = 10$ y $A = 30^\circ$:
$$2R = \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{0{,}5} = 20 \Rightarrow R = 10$$
- $b = 8$ y $B = 45^\circ$:
$$2R = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2} \Rightarrow R = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$$
- $R = 6$ y $A = 40^\circ$:
$$a = 2R\sin A = 12 \cdot \sin 40^\circ \approx 7{,}71$$

TEOREMA

Teorema del coseno

Es una **generalización del teorema de Pitágoras**: si $A = 90°$, entonces $\cos A = 0$ y queda $a^2 = b^2 + c^2$. Se usa cuando conocemos **dos lados y el ángulo que forman**, o **los tres lados** (para hallar los ángulos despejando el coseno).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

EJEMPLO:

- Dos lados y el ángulo que forman: $b = 5,\ c = 8,\ A = 60°$:
$$a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49 \Rightarrow a = 7$$
- Los tres lados: $a = 7,\ b = 5,\ c = 8$:
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 64 - 25}{112} = \frac{11}{14} \Rightarrow B \approx 38° \, 12' \, 48''$$

Área de un triángulo

PROPIEDAD

Dos lados y el ángulo que forman

El área es la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo **comprendido entre ellos**. Sale de $S = \frac{1}{2}\,\text{base} \cdot \text{altura}$, porque la altura sobre el lado c es $b\sin A$.

$$S = \frac{1}{2}\,b\,c\sin A = \frac{1}{2}\,a\,c\sin B = \frac{1}{2}\,a\,b\sin C$$

EJEMPLO:

$b = 7,\ c = 9$ y $A = 60°$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin 60° = \frac{63\sqrt{3}}{4} \approx 27{,}28$$

TEOREMA

Fórmula de Herón: los tres lados

Cuando solo conocemos los **tres lados**, no hace falta calcular ningún ángulo. Se halla el semiperímetro s y se aplica la fórmula.

$$s = \frac{a+b+c}{2} \qquad S = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

EJEMPLO:

$a = 13$, $b = 14$ y $c = 15$:

$$s = \frac{13+14+15}{2} = 21$$
$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84$$

PROPIEDAD

Área con el radio de la circunferencia circunscrita

Si se conocen los tres lados y el radio R de la circunferencia circunscrita, el área es el producto de los lados dividido entre $4R$. Sale de $S = \frac{1}{2}\,a\,b\sin C$ al sustituir $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ (teorema del seno). Despejando, también sirve para calcular R a partir de los lados y el área, por ejemplo con la fórmula de Herón. Conocido R, el área del círculo circunscrito es πR^2.

$$S = \frac{a\,b\,c}{4R} \qquad R = \frac{a\,b\,c}{4S} \qquad \text{Área del círculo} = \pi R^2$$

EJEMPLO:

- Lados 13, 14, 15 (área $S = 84$ por Herón):

$$R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8} = 8{,}125$$
$$\text{Área del círculo circunscrito} = \pi \cdot \left(\frac{65}{8}\right)^2 = \frac{4225\pi}{64} \approx 207{,}39$$

- Lados 6, 8, 10 con $R = 5$ (el diámetro es la hipotenusa):

$$S = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 5} = 24$$

que coincide con $\dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Ecuaciones trigonométricas

DEFINICIÓN

¿Qué es una ecuación trigonométrica?

Es una ecuación en la que la incógnita aparece dentro de una razón trigonométrica. Como las razones se repiten cada vuelta, si hay solución hay **infinitas**: se dan las soluciones de una vuelta, $[0°, 360°)$, y se les suma $360°k$ (o $2k\pi$ en radianes), con $k \in \mathbb{Z}$.
Como el seno y el coseno están entre -1 y 1, ecuaciones como $\sin x = 2$ **no tienen solución**.

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 360°k \\ x = 180° - \alpha + 360°k \end{cases}$$
$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = \pm\alpha + 360°k$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow x = \alpha + 180°k$$

EJEMPLO:

- $\sin x = \dfrac{1}{2}$: $x = 30° + 360°k$ y $x = 150° + 360°k$
- $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $x = 135° + 360°k$ y $x = 225° + 360°k$
- $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$: $x = 60° + 180°k$ (la tangente se repite cada $180°$)
- En radianes, $\sin x = \dfrac{1}{2}$ da $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

PROCEDIMIENTO

Resolver sacando factor común

Si todos los términos comparten una razón, sácala como factor común e iguala cada factor a cero. **Error típico**: dividir entre $\sin x$ o $\cos x$. Al hacerlo se pierden las soluciones en las que ese factor vale 0.
EJEMPLO:

$\sin 2x = \cos x$. Con el ángulo doble:

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°,\ 270°$
- $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30°,\ 150°$

Soluciones: $x = 30°, 90°, 150°, 270°$ (más $360°k$).

PROCEDIMIENTO

Resolver con una sola razón

Si aparecen seno y coseno mezclados, usa la identidad fundamental para dejarlo todo en función de una sola razón. Suele quedar una **ecuación de segundo grado**: haz un cambio de variable ($t = \sin x$), resuélvela y descarta las soluciones con $|t| > 1$.

EJEMPLO:

$2\cos^2 x + \sin x = 1$. Sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1 \Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Con $t = \sin x$: $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow t = 1$ o $t = -\dfrac{1}{2}$

- $\sin x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ$
- $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 210^\circ,\ 330^\circ$

Comprobación con $x = 210^\circ$: $2 \cdot \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = 1$ ✓

RESUMEN

1. Trigonometría

Grados y radianes

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad \text{rad} = \text{grados} \cdot \frac{\pi}{180}$$

Razones

En un triángulo rectángulo, con a cateto opuesto, b contiguo y c hipotenusa.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Relaciones fundamentales

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Ángulos notables

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Signos por cuadrante

I: todas positivas. II: solo el seno. III: solo la tangente. IV: solo el coseno.

Suma, resta y ángulo doble

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Teoremas del seno y del coseno

Para cualquier triángulo (R: radio de la circunferencia circunscrita).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Área de un triángulo

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A \qquad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s = \frac{a+b+c}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas

Hay dos ángulos por vuelta para el seno y el coseno. No dividas entre $\sin x$ o $\cos x$: saca factor común.

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = \alpha + 360^\circ k \text{ o } x = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k \qquad \cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = \pm\alpha + 360^\circ k$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

#

$1+\text{tg}^2\,\alpha=\text{sec}^2\,\alpha$ y $1+\text{cotg}^2\,\alpha=\text{cosec}^2\,\alpha$ TEOREMA 8

A

Ángulo DEFINICIÓN 3

C

Circunferencia goniométrica DEFINICIÓN 11
Cosecante, secante y cotangente DEFINICIÓN 7

E

¿Qué es una ecuación trigonométrica? DEFINICIÓN 20

F

Fórmula de Herón: los tres lados TEOREMA 19

G

Grado sexagesimal DEFINICIÓN 4

I

Identidad fundamental: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ TEOREMA 7

N

Notación en un triángulo cualquiera DEFINICIÓN 15

R

Radián DEFINICIÓN 4

S

Seno, coseno y tangente DEFINICIÓN 6

T

Teorema del coseno TEOREMA 18
Teorema del seno TEOREMA 16