ÁGORA - ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

VECTORES

Cuenca · 2026

ÍNDICE

1. Vectores **3**

¿Qué es un vector? 3
Espacios de vectores: dónde viven los vectores 6
Operaciones con vectores 8
Dependencia lineal, bases y coordenadas 11
Producto escalar 16
Producto vectorial 20
Producto mixto 24

Resumen **26**

Índice de conceptos **28**

TEMA 1

VECTORES

Vectores en el plano y en el espacio: módulo, operaciones, dependencia lineal y bases. Producto escalar, vectorial y mixto, con áreas y volúmenes.

¿Qué es un vector?

DEFINICIÓN

Vector fijo $\overrightarrow{AB}$

Un **vector fijo** es un segmento orientado: tiene un **origen** A y un **extremo** B, y se dibuja como una flecha de A a B. Sus **coordenadas** se obtienen restando **extremo menos origen** (nunca al revés: $\overrightarrow{BA}$ es el vector opuesto).
En V_2 el vector solo tiene dos coordenadas y se calcula igual.

$$A(a_1,a_2,a_3),\ B(b_1,b_2,b_3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$

EJEMPLO:

$A(1,2,-1)$ y $B(3,-1,5)$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-1,\ -1-2,\ 5-(-1)) = (2,-3,6)$$
$$\overrightarrow{BA} = (-2,3,-6)$$

En V_2: $A(1,2)$ y $B(4,6)$ → $\overrightarrow{AB} = (4-1,\ 6-2) = (3,4)$.

DEFINICIÓN

Módulo, dirección y sentido

Todo vector queda determinado por tres características:
• **Módulo**: su longitud, la distancia entre origen y extremo. Se escribe $|\vec{u}|$ y siempre es ≥ 0.
• **Dirección**: la de la recta que lo contiene. Dos vectores paralelos tienen la misma dirección.
• **Sentido**: hacia dónde apunta la flecha dentro de esa dirección (de los dos posibles).
En V_2 se omite la tercera coordenada; en V_n, se suman los cuadrados de las n coordenadas.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$
$$\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

EJEMPLO:

$$|\overrightarrow{AB}| = |(2, -3, 6)| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero **sentido contrario**.
En V_2: $|(3, 4)| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

DEFINICIÓN

Vectores equipolentes y vector libre

Dos vectores fijos son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido, aunque estén en sitios distintos; entonces tienen las mismas coordenadas. Todos los vectores equipolentes a uno dado forman un **vector libre** $\vec{u}$: es el que usamos al operar, porque solo importan sus coordenadas, no dónde esté dibujado.

EJEMPLO:

$A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(4, 1, 0)$, $D(5, 3, 3)$:
$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$ y $\overrightarrow{CD} = (5 - 4,\ 3 - 1,\ 3 - 0) = (1, 2, 3)$.
Son equipolentes: representan el mismo vector libre $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

DEFINICIÓN

Vector unitario

Un vector es **unitario** si su módulo es 1. Para obtener el vector unitario en la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ (**normalizar**), se divide cada coordenada entre el módulo. Si se quiere el de sentido contrario, se cambia el signo.

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad |\vec{e}| = 1$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (2, -3, 6)$, $|\vec{u}| = 7$:

$$\vec{e} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

Comprobación: $\frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = \frac{49}{49} = 1$ ✓

Unitarios en su dirección hay dos: $\vec{e}$ y $-\vec{e}$.

Espacios de vectores: dónde viven los vectores

DEFINICIÓN

¿Qué es un espacio de vectores?

El **espacio de vectores** V_n es el conjunto de las n-tuplas de números reales $(x_1,\ldots,x_n)$ con dos operaciones definidas coordenada a coordenada: la **suma** de dos vectores y el **producto** de un vector por un número (escalar). El resultado de ambas operaciones sigue siendo un vector de V_n (se dice que el conjunto es **cerrado**). Por ejemplo, la suma de dos vectores del plano es un vector del plano.
Lo que distingue a cada espacio es su **dimensión** n: el número de **coordenadas** necesarias para dar un vector, que es también el número de vectores independientes que hacen falta para obtener todos los demás (se verá con las bases).
Según la dimensión, las propiedades cambian: algo cierto en el plano puede ser falso en el espacio, y al revés. Por eso hay que tener claro en qué espacio se trabaja.

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \qquad k\,(x_1,\ldots,x_n)=(kx_1,\ldots,kx_n)$$

EJEMPLO:

- En una recta, un vector se da con 1 número: dimensión 1.
- En un plano, con 2 números: dimensión 2.
- En el espacio, con 3 números: dimensión 3.

DEFINICIÓN

V_2, V_3 y V_n

Se llama V_n al espacio de los vectores con n coordenadas (dimensión n):
• V_2: los vectores del **plano**. Se dan con dos coordenadas (x, y); los ejes son X e Y.
• V_3: los vectores del **espacio**. Se dan con tres coordenadas (x, y, z); los ejes son X, Y y Z.
• V_n: con n coordenadas. Para $n \geq 4$ no se puede dibujar, pero las operaciones y muchas propiedades funcionan igual: solo cambia el número de coordenadas.
Un vector de V_2 y uno de V_3 son objetos distintos: $(1, 2)$ no es lo mismo que $(1, 2, 0)$ y no se pueden sumar entre sí.

$$V_n = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mid u_i \in \mathbb{R}\}$$

EJEMPLO:

$(3, -1) \in V_2$, $(2, 0, 5) \in V_3$, $(1, 2, 0, -1) \in V_4$.

OBSERVACIÓN

Qué cambia según el espacio

En este tema, **salvo que se diga lo contrario, trabajamos en** V_3, y cada vez que una propiedad dependa de la dimensión se avisa. Resumen:
• **Valen en cualquier** V_n (solo hay que usar n coordenadas): suma, resta y producto por un escalar, combinación lineal, módulo, vector unitario, paralelismo, producto escalar, ángulo, perpendicularidad y proyección.
• **Dependen de la dimensión**: cuántos vectores tiene una base (n), cuántos vectores independientes puede haber como máximo (n) y el criterio del determinante (se necesitan n vectores de V_n). «Coplanarios» es un concepto de V_3.
• **Solo se definen en** V_3, tal como se estudian aquí: el producto vectorial y el producto mixto.

EJEMPLO:

• Tres vectores de V_3 pueden ser independientes (por ejemplo, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$); tres vectores de V_2 son **siempre** dependientes.
• Una base de V_2 tiene 2 vectores; una base de V_3, 3.

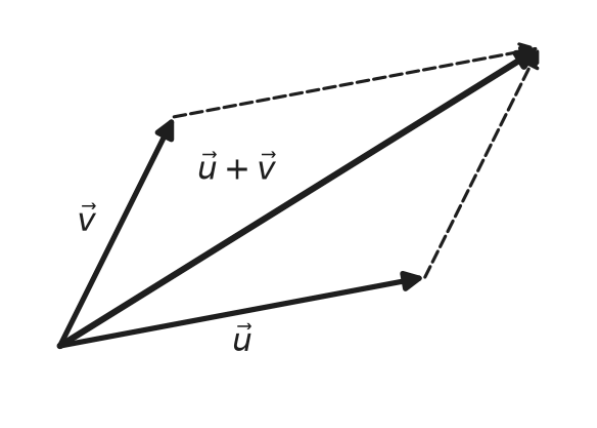
Operaciones con vectores

DEFINICIÓN

Suma de vectores

Se suman **coordenada a coordenada**. Gráficamente se usa la **regla del paralelogramo**: con los dos vectores en el mismo origen, la suma es la diagonal del paralelogramo que forman. Equivale a colocar el origen de $\vec{v}$ en el extremo de $\vec{u}$.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)$$



EJEMPLO:

$\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4, -2)$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1,\ -1 + 4,\ 3 + (-2)) = (3, 3, 1)$$

DEFINICIÓN

Resta de vectores

Restar es sumar el **opuesto**: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, donde $-\vec{v}$ tiene el mismo módulo y dirección que $\vec{v}$ pero sentido contrario. En el paralelogramo, $\vec{u} - \vec{v}$ es la otra diagonal (va del extremo de $\vec{v}$ al de $\vec{u}$).

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ u_3 - v_3)$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4, -2)$:

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1,\ -1 - 4,\ 3 - (-2)) = (1, -5, 5)$$

Cuidado con los signos al restar un número negativo.

DEFINICIÓN

Producto de un escalar por un vector

Multiplicar un vector por un número real k (un **escalar**) multiplica cada coordenada por k. El resultado tiene la **misma dirección** que $\vec{u}$, su módulo se multiplica por $|k|$ y:

- si $k > 0$, conserva el sentido;
- si $k < 0$, invierte el sentido;
- si $k = 0$, da el vector nulo $\vec{0}$.

$$k \cdot \vec{u} = (ku_1,\ ku_2,\ ku_3) \qquad |k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (2, -1, 3)$:

- $3\vec{u} = (6, -3, 9)$: el triple de largo, mismo sentido.
- $-\frac{1}{2}\vec{u} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$: la mitad de largo, sentido contrario.

DEFINICIÓN

Combinación lineal

Una **combinación lineal** de varios vectores es cualquier suma de esos vectores multiplicados por números. Se calcula haciendo primero los productos por escalares y después las sumas, como en la jerarquía de operaciones.

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{t}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4, -2)$:

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = (4, -2, 6) - (3, 12, -6) = (1, -14, 12)$$

DEFINICIÓN

Vectores paralelos (proporcionales)

Dos vectores no nulos son **paralelos** (tienen la misma dirección) si uno es un múltiplo del otro, es decir, si sus coordenadas son **proporcionales**. Si alguna coordenada es 0, la del otro vector también tiene que serlo. En V_2 solo hay dos cocientes.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{v} = k\vec{u} \iff \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$$

EJEMPLO:

- $(2, -1, 3)$ y $(-4, 2, -6)$: $\frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = -2$ → paralelos, sentido contrario.
- $(1, 2, 3)$ y $(2, 4, 5)$: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{5}{3}$ → no son paralelos.
- En V_2: $(1, -2)$ y $(3, -6)$: $\frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = 3$ → paralelos.

Dependencia lineal, bases y coordenadas

DEFINICIÓN

Vectores linealmente dependientes e independientes

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** si alguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los demás. Si ninguno se puede, son **linealmente independientes**.
Interpretación geométrica:
• Dos vectores son dependientes si son **paralelos** (en V_2 y en V_3).
• Tres vectores de V_3 son dependientes si son **coplanarios** (están en un mismo plano). Tres vectores de V_2 **siempre** son dependientes: todos están ya en un plano.
• El máximo número de vectores independientes es la **dimensión** del espacio: 2 en V_2, 3 en V_3, n en V_n. Con más vectores que la dimensión, **siempre son dependientes**.

$$\text{Independientes} \iff a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_k\vec{u}_k = \vec{0} \text{ solo para } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (2,1,0)$, $\vec{w} = (4,5,6)$:

$$2\vec{u} + \vec{v} = (2,4,6) + (2,1,0) = (4,5,6) = \vec{w}$$

$\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ → son **linealmente dependientes** (coplanarios).
En V_2: $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (3,1)$, $\vec{w} = (5,5)$: $2\vec{u} + \vec{v} = (2,4) + (3,1) = (5,5) = \vec{w}$ → dependientes. Tres vectores en el plano siempre lo son.

PROCEDIMIENTO

Estudio con el rango o el determinante

Para saber si unos vectores son independientes, se colocan como filas de una matriz y se calcula su **rango**: el rango es el número máximo de vectores independientes. Si hay **tantos vectores como la dimensión** (2 en V_2, 3 en V_3), basta el **determinante**:

• $\det \neq 0$ → linealmente independientes.

• $\det = 0$ → linealmente dependientes.

Si el número de vectores no coincide con la dimensión, el determinante no se puede usar y hay que calcular el rango.

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ independientes} \iff \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in V_2 \text{ independientes} \iff \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24 = 0$$

→ dependientes (lo que ya vimos).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -2 \neq 0$$

→ independientes.

En V_2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

→ $(1,2)$ y $(3,1)$ son independientes; $(1,2)$ y $(2,4)$ son dependientes (paralelos).

DEFINICIÓN

Base de un espacio

Una **base** de V_n es un conjunto de n **vectores linealmente independientes**: 2 vectores no paralelos en V_2, 3 vectores no coplanarios en V_3. Cualquier otro vector del espacio se puede escribir, **de forma única**, como combinación lineal de ellos. Con menos de n vectores no se llega a todo el espacio, y con más sobran (son dependientes), así que una base tiene exactamente tantos vectores como la dimensión.
Una base es **ortogonal** si sus vectores son perpendiculares dos a dos, y **ortonormal** si además son unitarios.

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ base de } V_3 \iff \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \neq 0$$

EJEMPLO:

- $\{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ es una base de V_3, porque su determinante vale $-2 \neq 0$.
- $\{(1,2,3), (2,1,0), (4,5,6)\}$ no es base: su determinante es 0.
- $\{(1,2), (3,1)\}$ es una base de V_2 (determinante $-5 \neq 0$).
- $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ no es base de V_2: son 3 vectores y sobra uno.

DEFINICIÓN

Base canónica

La **base canónica** está formada por vectores unitarios y perpendiculares entre sí, uno en la dirección de cada eje: $\vec{i}$ (eje X), $\vec{j}$ (eje Y) y, en V_3, $\vec{k}$ (eje Z). Es ortonormal. En V_2 son dos vectores; en V_n, n vectores (con un 1 en una posición y ceros en el resto). Cuando damos un vector como (u_1, u_2, u_3) sin indicar base, nos referimos a esta.

$$V_3: \ \vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1)$$
$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$
$$V_2: \ \vec{i} = (1,0), \quad \vec{j} = (0,1) \qquad \vec{u} = (u_1, u_2) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$$

EJEMPLO:

$$\vec{u} = (2,-1,3) = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

En V_2: $(4,-3) = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

DEFINICIÓN

Coordenadas de un vector en una base

Si $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una base de V_3, las **coordenadas** de $\vec{w}$ en B son los únicos números (a,b,c) tales que $\vec{w}=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2+c\vec{u}_3$. Para hallarlas se iguala coordenada a coordenada y se resuelve el **sistema**. En V_2 la base tiene dos vectores y las coordenadas son dos números (a,b).

$$\vec{w}=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2+c\vec{u}_3 \Rightarrow \vec{w}=(a,b,c)_B$$

EJEMPLO:

Coordenadas de $\vec{w}=(3,4,5)$ en $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$:

$$(3,4,5)=a(1,0,1)+b(0,1,1)+c(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} a+c=3 \\ b+c=4 \\ a+b=5 \end{cases}$$

Sumando las tres: $2(a+b+c)=12 \Rightarrow a+b+c=6$.
Entonces $b=6-3=3$, $a=6-4=2$, $c=6-5=1$.

$$\vec{w}=(2,3,1)_B$$

En V_2: coordenadas de $\vec{w}=(5,5)$ en $B=\{(1,2),(3,1)\}$:

$$(5,5)=a(1,2)+b(3,1) \Rightarrow \begin{cases} a+3b=5 \\ 2a+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=2,\ b=1 \Rightarrow \vec{w}=(2,1)_B$$

DEFINICIÓN

Sistema de referencia y coordenadas de un punto

Un vector libre no está en ningún sitio concreto, pero un **punto** sí. Para dar la posición de un punto con números necesitamos dos cosas:

• Un punto fijo de partida, el **origen** O, donde se cortan los ejes X, Y, Z.

• Una base, normalmente $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, que marca la dirección de los ejes y la unidad de medida.

Juntos forman el **sistema de referencia** $R=\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ en V_3 (en V_2, $R=\{O;\vec{i},\vec{j}\}$, con solo los ejes X e Y).

Para llegar desde O hasta un punto P hay un único vector, $\overrightarrow{OP}$, llamado **vector de posición** de P. Las coordenadas del punto son, por definición, las coordenadas de ese vector: $P(x,y,z)$ significa «desde O, avanza x en el eje X, y en el eje Y y z en el eje Z».

Esto es lo que justifica la regla **extremo menos origen**: para ir de A a B se puede volver a O y salir hacia B.

$$P(x,y,z) \iff \overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$$
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

EJEMPLO:

• El punto $P(2,-1,4)$ se alcanza desde O con el vector $\overrightarrow{OP}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}=(2,-1,4)$: los mismos números, uno es un punto y el otro una flecha.

• Con $A(1,2,-1)$ y $B(3,-1,5)$:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,-1,5)-(1,2,-1)=(2,-3,6)$$

que coincide con «extremo menos origen» del principio del tema.

Producto escalar

DEFINICIÓN

Definición: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

El **producto escalar** de dos vectores es un **número** (no un vector): el producto de sus módulos por el coseno del ángulo α que forman (si alguno de los dos es el vector nulo, el producto escalar es 0). Su signo indica cómo es el ángulo:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ → ángulo agudo.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ → ángulo recto.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ → ángulo obtuso.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

EJEMPLO:

$|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, ángulo de 60°:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

PROPIEDAD

Expresión analítica

En una base ortonormal (como la canónica), el producto escalar se calcula multiplicando **coordenada a coordenada** y sumando. Es la forma de calcularlo cuando conocemos las coordenadas. En V_2 se multiplican las dos coordenadas; en general, en V_n, las n coordenadas.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
$$V_2: \ \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4, -2)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 2 - 4 - 6 = -8$$

Es negativo: forman un ángulo obtuso.

En V_2: $(3, 2) \cdot (1, -4) = 3 - 8 = -5$.

PROPIEDAD

Propiedades

- **Conmutativa**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Distributiva**: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- **Con escalares**: $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- **Un vector por sí mismo** da su módulo al cuadrado, así que el módulo se puede calcular con el producto escalar.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

EJEMPLO:

Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 9 + 12 + 16 = 37$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{37}$$

PROCEDIMIENTO

Ángulo entre dos vectores

Despejando el coseno de la definición se obtiene el **ángulo** que forman dos vectores. El ángulo entre vectores está entre $0°$ y $180°$, y el signo del coseno dice si es agudo u obtuso.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + 0 + 0 = 1$, $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

DEFINICIÓN

Vectores perpendiculares (ortogonales)

Dos vectores son **perpendiculares** u **ortogonales** (las dos palabras significan lo mismo) si forman un ángulo de $90°$. Como $\cos 90° = 0$, la condición es que su producto escalar sea **cero**. Es la forma más rápida de comprobar perpendicularidad o de hallar un parámetro que la haga cumplir.
En V_2 hay una receta rápida: un vector perpendicular a (a, b) se obtiene intercambiando las coordenadas y cambiando el signo de una.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$
$$V_2: \ (a, b) \perp (-b, a)$$

EJEMPLO:

- $(1, 2, 2) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 2 = 0$ → perpendiculares.
- Valor de k para que $\vec{u} = (2, k, 1)$ y $\vec{v} = (3, -1, 4)$ sean ortogonales:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - k + 4 = 0 \Rightarrow k = 10$$

- En V_2: un perpendicular a $(3, 4)$ es $(-4, 3)$, porque $-12 + 12 = 0$.

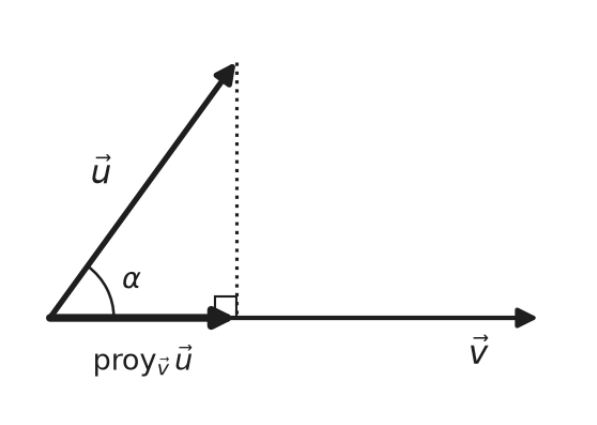
DEFINICIÓN

Proyección de un vector sobre otro

Interpretación geométrica: el producto escalar es el módulo de $\vec{v}$ multiplicado por la **proyección** de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, es decir, la «sombra» que deja $\vec{u}$ sobre la recta de $\vec{v}$.

- La **proyección escalar** es un número (la longitud con signo de esa sombra).
- El **vector proyección** es esa sombra como vector, en la dirección de $\vec{v}$.

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$$



EJEMPLO:

Proyección de $\vec{u} = (2,1,3)$ sobre $\vec{v} = (1,2,2)$:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2+2+6 = 10\,,\ |\vec{v}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{10}{3} \qquad \overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}} = \frac{10}{9}(1,2,2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$$

Producto vectorial

DEFINICIÓN

Definición: $\vec{u} \times \vec{v}$

Solo se define en V_3. El **producto vectorial** de dos vectores de V_3 es otro **vector** (a diferencia del escalar) definido por:

- **Módulo**: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$.
- **Dirección**: perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ a la vez.
- **Sentido**: el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (**regla de la mano derecha**).

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos o alguno es nulo, $\sin\alpha = 0$ y el producto vectorial es el vector nulo $\vec{0}$. También se escribe $\vec{u} \wedge \vec{v}$. En V_2 no existe, porque el resultado saldría del plano.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$$

EJEMPLO:

Con la base canónica: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.
Si se cambia el orden, cambia el signo: $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$.

PROPIEDAD

Cálculo con un determinante

Se calcula desarrollando por la primera fila un determinante con $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ en la primera fila y las coordenadas de los vectores en las otras dos. Ojo con el **signo menos** del término de $\vec{j}$, el error más frecuente.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

EJEMPLO:

$\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(2,0,3)$:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\2&0&3\end{vmatrix}=(6-0)\vec{i}-(3+2)\vec{j}+(0-4)\vec{k}=(6,-5,-4)$$

Comprobación (debe ser perpendicular a ambos):
$(6,-5,-4)\cdot(1,2,-1)=6-10+4=0$ ✓
$(6,-5,-4)\cdot(2,0,3)=12+0-12=0$ ✓

PROPIEDAD

Propiedades

- **Anticonmutativa**: $\vec{v}\times\vec{u}=-(\vec{u}\times\vec{v})$. El orden importa.
- **Distributiva**: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$.
- **Con escalares**: $(k\vec{u})\times\vec{v}=k(\vec{u}\times\vec{v})$.
- **No es asociativa**: en general $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\neq\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$.
- Da el **vector nulo** si y solo si los vectores son paralelos ($\sin 0^\circ=\sin 180^\circ=0$).

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}\iff\vec{u}\parallel\vec{v}$$

EJEMPLO:

$(1,2,3)\times(2,4,6)=(12-12,\ -(6-6),\ 4-4)=(0,0,0)$, porque $(2,4,6)=2(1,2,3)$ son paralelos.

PROPIEDAD

Vector perpendicular a otros dos (en V_3)

En V_3, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **no son paralelos**, $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a ambos, así que es la herramienta directa para obtener un **vector perpendicular a dos vectores dados** (por ejemplo, el vector normal de un plano). Si se pide unitario, se divide entre su módulo.
Esto es propio de V_3: en V_2 no hay ningún vector perpendicular a dos vectores no paralelos (excepto el nulo), y en V_4 hay infinitos que no son paralelos entre sí.

EJEMPLO:

Vector unitario perpendicular a $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (2, 0, 3)$:
$\vec{u} \times \vec{v} = (6, -5, -4)$, $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{36 + 25 + 16} = \sqrt{77}$

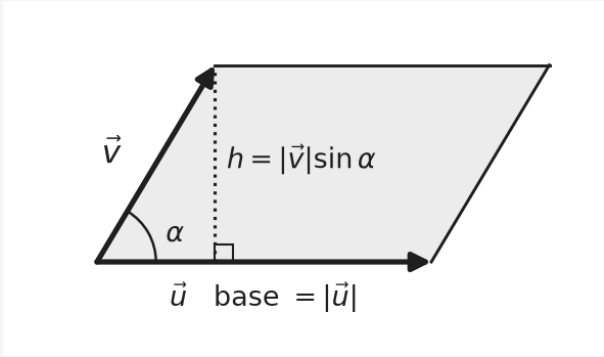
$$\vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{77}}(6, -5, -4)$$

PROPIEDAD

Interpretación geométrica: área del paralelogramo y del triángulo

El **módulo** del producto vectorial es el **área del paralelogramo** que tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados. Se ve con «base por altura»: la base es $|\vec{u}|$ y la altura es $|\vec{v}|\sin\alpha$ (lo que sobresale $\vec{v}$ en perpendicular a $\vec{u}$), así que el área es $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha$, que es justo el módulo de $\vec{u}\times\vec{v}$. El triángulo es la mitad del paralelogramo.
En V_2 no hay producto vectorial, pero el área del paralelogramo de lados $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es el **valor absoluto del determinante** 2×2 (el resultado coincide con el módulo del producto vectorial al ver los vectores como $(u_1,u_2,0)$ y $(v_1,v_2,0)$).

$$S_{\text{paralelogramo}}=|\vec{u}\times\vec{v}| \qquad S_{\text{triángulo }ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$



$$V_2:\ S_{\text{paralelogramo}}=\left|\begin{matrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{matrix}\right| \qquad S_{\text{triángulo}}=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{matrix}\right|$$

EJEMPLO:

- Paralelogramo de lados $\vec{u}=(1,2,-1)$ y $\vec{v}=(2,0,3)$: $S=\sqrt{77}\approx 8{,}77\ \text{u}^2$.
- Triángulo $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$:

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1-0,\ -(-1-0),\ 0+1)=(1,1,1)$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{u}^2$$

- En V_2: triángulo $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(1,3)$: $\overrightarrow{AB}=(4,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,3)$

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}4 & 0\\ 1 & 3\end{matrix}\right|=\frac{12}{2}=6\ \text{u}^2$$

Producto mixto

DEFINICIÓN

Definición: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

Solo se define en V_3 (necesita tres vectores y un determinante 3×3). El **producto mixto** de tres vectores es el **número** que resulta de multiplicar escalarmente el primero por el producto vectorial de los otros dos. En la práctica se calcula con el **determinante** de sus coordenadas.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO:

$\vec{u}=(1,2,0)$, $\vec{v}=(0,1,3)$, $\vec{w}=(2,0,1)$:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+12+0-0-0-0 = 13$$

PROPIEDAD

Propiedades

Salen de las propiedades de los determinantes:

- Si se **permutan dos vectores**, cambia el signo: $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.
- Una **permutación cíclica** no lo cambia: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$.
- Es **cero** si y solo si los tres vectores son linealmente dependientes, es decir, **coplanarios** (en V_3).

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \iff \vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ coplanarios}$$

EJEMPLO:

Valor de k para que $(1,1,k)$, $(2,0,1)$ y $(0,1,3)$ sean coplanarios:

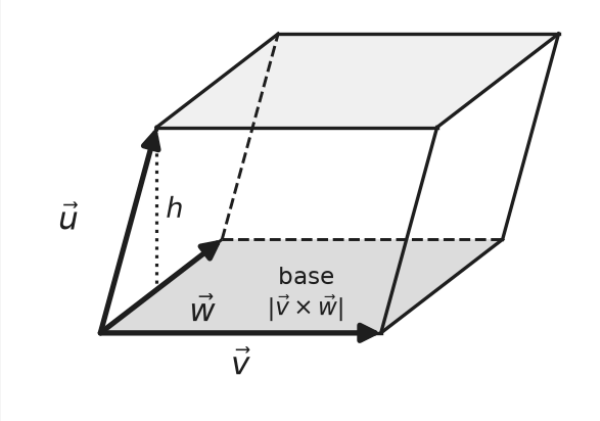
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0+0+2k-0-1-6 = 2k-7 = 0 \Rightarrow k = \frac{7}{2}$$

PROPIEDAD

Interpretación geométrica: volumen del paralelepípedo y del tetraedro

El **valor absoluto** del producto mixto es el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Se ve con «área de la base por altura»: la base es el paralelogramo de lados $\vec{v}$ y $\vec{w}$, de área $|\vec{v}\times\vec{w}|$, y la altura es lo que $\vec{u}$ se eleva sobre ese plano, es decir, $|\vec{u}||\cos\theta|$, con θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}\times\vec{w}$ (que es perpendicular a la base). Multiplicando, $V=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}||\cos\theta|=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$. El **tetraedro** con esas aristas tiene la sexta parte de ese volumen. No olvides el valor absoluto: un volumen nunca es negativo.

$$V_{\text{paralelepípedo}}=|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| \qquad V_{\text{tetraedro }ABCD}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|$$



EJEMPLO:

- Paralelepípedo de aristas $(1,2,0)$, $(0,1,3)$, $(2,0,1)$: $V=|13|=13\ \text{u}^3$.
- Tetraedro $A(0,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,1,3)$, $D(2,0,1)$: sus aristas desde A son esos mismos vectores, luego

$$V=\frac{13}{6}\ \text{u}^3$$

RESUMEN

1. Vectores

Vector entre dos puntos y módulo

Extremo menos origen.

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3) \qquad |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Operaciones y paralelismo

Coordenada a coordenada. Dos vectores son paralelos si son proporcionales.

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, u_3 \pm v_3) \qquad k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \qquad \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$$

Independencia y bases

Tres vectores de V_3 son independientes (y forman base) si su determinante no es 0. Base canónica: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \iff \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ base de } V_3$$

Producto escalar

Da un número. Perpendiculares si vale 0.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Proyección

$$\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Producto vectorial

Da un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$; es $\vec{0}$ si son paralelos. Su módulo es el área del paralelogramo.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Producto mixto

Es 0 si los vectores son coplanarios. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|$$

ÍNDICE DE CONCEPTOS

B

Base canónica DEFINICIÓN 13
Base de un espacio DEFINICIÓN 13

C

Combinación lineal DEFINICIÓN 10
Coordenadas de un vector en una base DEFINICIÓN 14

D

Definición: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ DEFINICIÓN 16
Definición: $\vec{u} \times \vec{v}$ DEFINICIÓN 20
Definición: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ DEFINICIÓN 24

E

¿Qué es un espacio de vectores? DEFINICIÓN 6

M

Módulo, dirección y sentido DEFINICIÓN 4

P

Producto de un escalar por un vector DEFINICIÓN 9
Proyección de un vector sobre otro DEFINICIÓN 19

R

Resta de vectores DEFINICIÓN 9

S

Sistema de referencia y coordenadas de un punto DEFINICIÓN 15
Suma de vectores DEFINICIÓN 8

V

V_2, V_3 y V_n DEFINICIÓN 7
Vector fijo $\overrightarrow{AB}$ DEFINICIÓN 3
Vector unitario DEFINICIÓN 5
Vectores equipolentes y vector libre DEFINICIÓN 4
Vectores linealmente dependientes e independientes DEFINICIÓN 11
Vectores paralelos (proporcionales) DEFINICIÓN 10
Vectores perpendiculares (ortogonales) DEFINICIÓN 18